نام درس:

# مدارهای الکتریکی ۲

ویرایش ششم

مدرس:

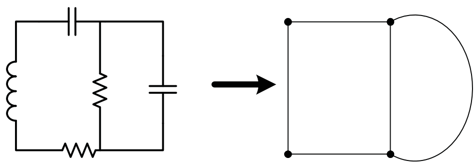
## ذاکر حقیقی

# بخش اول

# بخش اول: گراف های شبکه و تجزیه و تحلیل حلقه و کات‌ست

## ۱-۱- مقدمه

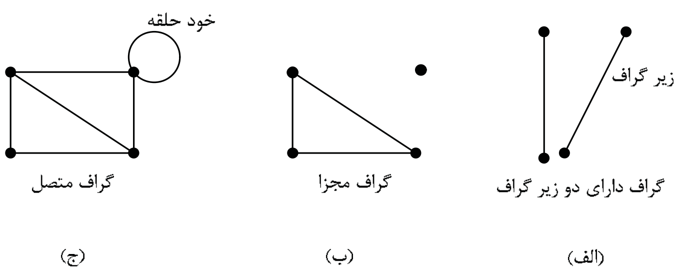
در تمام روش های تحلیل مدار که در درس مدارهای الکتریکی ۱ آموختیم، فرض اولیه مسطح بودن گراف مداری بود. در این بخش به معرفی روش های تحلیل کات‌ست و حلقه می پردازیم که نسبت به روش های گره و مش دارای انعطاف پذیری بیشتری بوده و از جمله کاربردهای آن در شبکه ها با گراف غیرمسطح می باشد.
در این فصل مدارهای الکتریکی را بعنوان یک گراف مورد بررسی قرار می دهیم یعنی اجزای مداری را حذف و فقط گره ها و شاخه ها را در نظر می گیریم:



**شکل ۱-۱: تبدیل مدار به گراف**

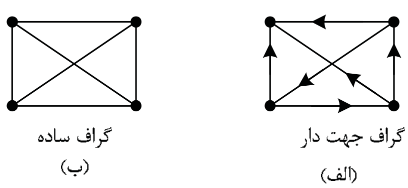
### یادآوری:

منظور از گراف، دسته ای از گره ها به همراه دسته ای از شاخه ها می باشد بطوریکه به هر دو سر هر شاخه، یک گره متصل باشد.




**شکل ۱-۲: انواع گراف**

اگر شاخه های گراف، پیکان جهت دار، گراف را جهت دار گویند:




**شکل ۱-۳: گراف جهت دار و ساده**

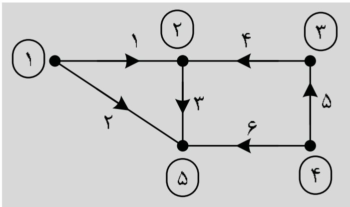
برای هر گراف جهت دار یک ماتریس متناظر به نام ماتریس تلاقی تعریف می گردد. فرض کنید که یک گراف شامل $b$ شاخه و $n_t$ گره باشد. ماتریس تلاقی گره با شاخه $A_a$ به یک ماتریس با ابعاد $n_t \times b$ گفته می شود بطوریکه داشته باشیم:

$$= \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } i \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases} \qquad ۱-۱$$

از آنجا که هر شاخه از یک گره خارج شده و به یک گره دیگر وارد می شود، هر ستون ماتریس $A_a$ فقط شامل یک 1 و یک 1− بوده و تمام درایه های دیگر آن صفر است.

**◄ مثال ۱-۱:**

**ماتریس تلاقی گراف شکل زیر را مشخص نمایید:**




**حل:**

ماتریس تلاقی بصورت زیر خواهد بود:

$$A_a = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \;\; 2 & \;\; 3 & \;\; 4 & \;\; 5 & \;\; 6 \end{matrix} \end{array}$$

شماره گره

شماره شاخه

## ۱-۲- کات‌ست ها و قانون جریان کیرشف:

اگر گره های یک شبکه مداری را توسط یک سطح گوسی به دو دسته تقسیم کنیم، بطوریکه دسته ای از گره ها در داخل و دسته دیگر خارج آن باشند، قانون جریان کیرشف لازم می دارد که مجموع جبری جریان های که از سطح گوسی خارج و یا داخل می شوند، مساوی صفر باشد. با این تعمیم از قانون جریان کیرشف به تعریف جدیدی می رسیم:

**تعریف:**

دسته ای از شاخه های یک گراف پیوسته را **کات‌ست** گویند، چنانچه:

الف) حذف تمام شاخه های این دسته موجب شود که گراف باقیمانده دارای دو جزء جدا از هم باشد.

ب) حذف تمام شاخه های این دسته بجز یکی از آنها گراف را پیوسته باقی گذارد.

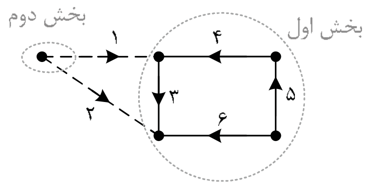
**◄ مثال ۱-۲:**

**برای گراف مداری مثال ۱-۱ کدام یک از دسته شاخه های معرفی شده زیر کات‌ست می باشد:**

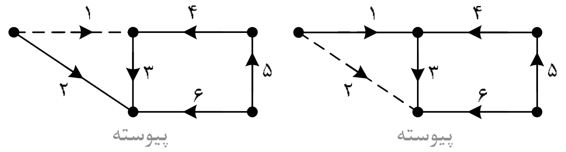
۱) $\{1,2\}$

**حل:**

برای بررسی کات‌ست بودن شاخه باید دو شرط تعریف فوق را بررسی نماییم؛ برای بررسی شرط اول ابتدا تمام شاخه های بیان شده را حذف می کنیم تا مشخص شود که آیا گراف به دو قسمت تقسیم می گردد یا خیر؟



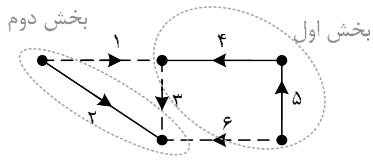

اکنون که این شرط برقرار است، بررسی می کنیم که آیا رسم هر یک از شاخه های حذف شده به تنهایی گراف را پیوسته می کند یا خیر؟



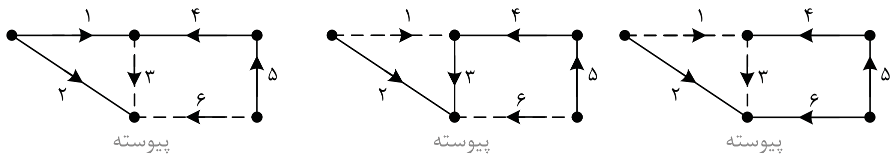

بنابراین این دسته شاخه ها کات‌ست هستند.

۲) $\{1,3,6\}$

**حل:**



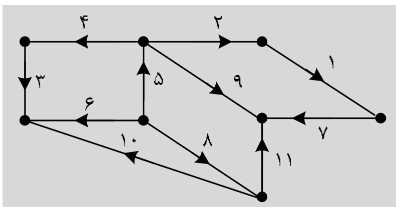

اکنون که این شرط برقرار است، بررسی می کنیم که آیا رسم هر یک از شاخه های حذف شده به تنهایی گراف را پیوسته می کند یا خیر؟




بنابراین این دسته شاخه ها کات‌ست هستند.

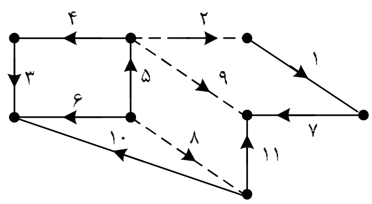
**مثال ۱-۳:**

**برای گراف مداری زیر کدام یک از دسته شاخه های معرفی شده زیر کات‌ست می باشد:**



۱) $\{2,9,8\}$

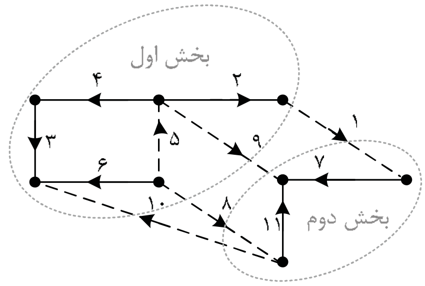
**حل:**



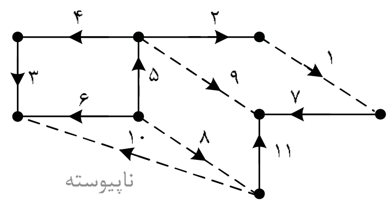
گراف مجزا نخواهد شد بنابرین کات‌ست نیست.

۲) $\{1,9,8,10,5\}$

**حل:**




اکنون که این شرط برقرار است، بررسی می کنیم که آیا رسم هر یک از شاخه های حذف شده به تنهایی گراف را پیوسته می کند یا خیر؟




بنابراین این دسته شاخه ها کات‌ست نیستند.

اکنون با دانستن تعریف کات‌ست، قانون جریان کیرشف را مجدداً بررسی می کنیم:

**قانون جریان کیرشف (KCL) برای کات‌ست:**

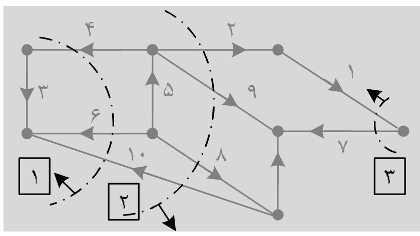
برای هر شبکه فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از کات‌ست های آن، جمع جبری جریان تمام شاخه های هر کات‌ست آن مساوی صفر است.

**نکته:** برای تعیین علامت جبری هر کات‌ست، ابتدا یک جهت دلخواه برای کات‌ست در نظر می گیریم و سپس در نوشتن معادله جریان، جریان های هم جهت با کات‌ست را مثبت و جریان های خلاف جهت با آن را منفی لحاظ می کنیم.

**نکته:** تمام شاخه های متصل به یک گره در گراف مداری کات‌ست خواهند بود.

**مثال ۱-۴:**

**برای کات‌ست های نشان داده شده در گراف مداری مثال ۱-۳ قانون KCL را بیان کنید:**



**حل:**

کات‌ست شماره ۱: $i_4 + i_6 + i_{10} = 0$

کات‌ست شماره ۲: $i_2 + i_9 + i_8 - i_{10} = 0$

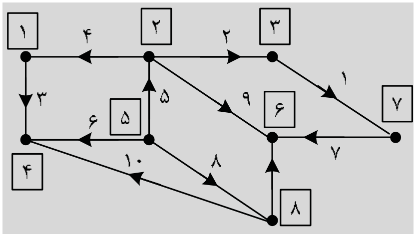
کات‌ست شماره ۳: $-i_1 + i_7 = 0$

## ۱-۳- حلقه ها و قانون ولتاژ کیرشف:

**تعریف:**
یک زیرگراف از گراف اصلی مداری را **حلقه** گویند اگر:

الف) شاخه های این زیر گراف متصل باشند.
ب) با شروع از هر گره در مسیر ایجاد شده توسط شاخه های این زیرگراف از هر گره تنها یکبار عبور کنیم و مجددا به گره اول بازگردیم.

**◄ مثال ۱-۵:**
**برای گراف مداری زیر کدام یک از دسته شاخه های معرفی شده زیر حلقه می باشند:**




**۱)** $\{4,5,6,3\}$

**حل:**
این چهار شاخه متصل هستند و با شروع از هر گره می توان با عبور از این چهار شاخه مجددا به گره اصلی بازگشت. بنابراین مسیر این شاخه ها را حلقه گویند.

**۲)** $\{4,2,1,7,9\}$

**حل:**
این پنج شاخه متصل هستند اما با شروع از گره ۱ نمی توان با عبور از این پنج شاخه مجددا به گره ۱ بازگشت. بنابراین حلقه نیست.

**۳)** $\{6,5,7\}$

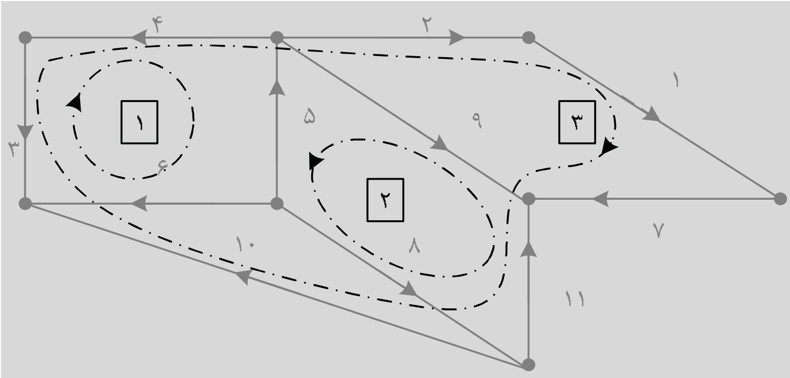
**حل:**
این سه شاخه متصل نیستند. بنابراین حلقه تشکیل نمی دهند.

بنابراین این دسته شاخه ها کات‌ست نیستند.

**قانون ولتاژ کیرشف (KVL) برای حلقه:**
برای هر شبکه فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از حلقه های آن، جمع جبری ولتاژ شاخه های هر حلقه مساوی صفر است.

**نکته:** برای تعیین علامت جبری هر حلقه، ابتدا یک جهت دلخواه برای آم در نظر می گیریم و سپس در نوشتن معادله ولتاژ، شاخه های هم جهت با حلقه را مثبت و شاخه های خلاف جهت با آن را منفی لحاظ می کنیم.

**◄ مثال ۱-۶:**
**برای گراف مداری زیر قانون KVL را بیان نمایید.**



**حل:**

حلقه شماره ۱: $-v_4 - v_5 + v_6 - v_3 = 0$

حلقه شماره ۲: $-v_5 + v_8 + v_{11} - v_9 = 0$

حلقه شماره ۳: $-v_4 + v_2 + v_1 + v_7 - v_{11} + v_{10} - v_3 = 0$

اکنون که با تعاریف کات‌ست و حلقه آشنا شدیم، می توانیم به تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی با استفاده از روش های مبتنی بر کات‌ست و حلقه بپردازیم. این روشها عموماً روشهایی برای حل مدار های پیچیده می باشند. با بیان چند نکته دیگر، بحث در خصوص این روش ها را آغاز می کنیم:

**تعریف:**

یک زیر گراف از گراف مداری را **درخت** گویند، اگر:

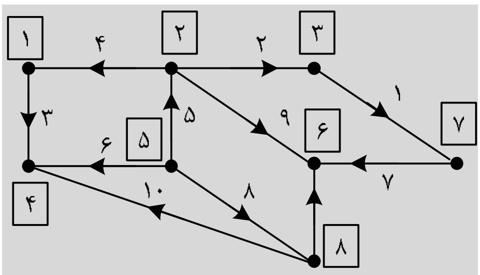
الف) زیرگراف متصل باشد.

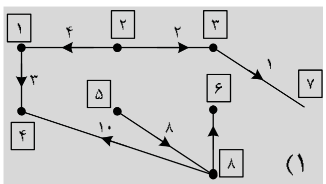
ب) شامل تمام گره های گراف اصلی باشد.

ج) شامل هیچ حلقه ای نباشد.

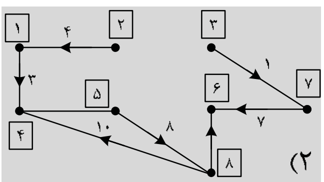
**مثال ۱-۷:**

**برای حلقه های مشخص شده در گراف مداری زیر، قانون ولتاژ کیرشف را بیان نمایید:**

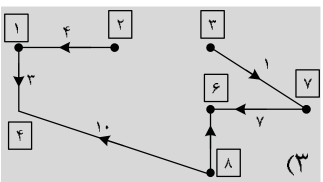




هر سه شرط را داراست، بنابراین درخت است.

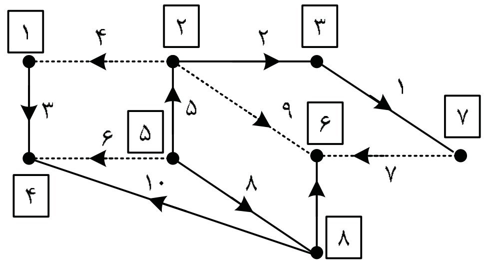


حلقه دارد پس درخت نیست.



گره ۵ را شامل نمی شود، درخت نیست.

**تعریف:** برای هر درخت از گراف اصلی، شاخه هایی از گراف را که شاخه درخت نباشند، **لینک** گویند. بطور مثال در گراف زیر شاخه های خط چین، لینک های درخت مشخص شده می باشند:



**نکات مهم:**

اگر یک گراف مداری، شامل $n_t$ گره و $b$ شاخه باشد، هر درخت از این گراف، دارای $n = n_t - 1$ شاخه و $\ell = b - (n_t - 1)$ یا $\ell = b - n$ لینک خواهد بود.

تعداد درخت های ممکن قابل ترسیم بر روی یک گراف شامل $n_t$ گره برابر $n_t^{\,n_t - 2}$ می باشد.

**قضیه:**

گراف متصل g با $n_t$ گره و $b$ شاخه و یک درخت T از آن را در نظر بگیرید:

- میان هر جفت گره از g، مسیر یکتایی از روی شاخه های درخت وجود دارد.
- هر لینک از T و مسیر یکتای میان گره های دو سر آن روی شاخه های T، حلقه یکتایی به نام **حلقه اساسی** تشکیل می‌دهند.
- هر شاخه از درخت T به همراه برخی از لینکهای آن که در تعریف کات‌ست صدق کنند، کات‌ست یکتایی به نام **کات‌ست اساسی** تشکیل می دهند.
- تعداد کات‌ست های اساسی به تعداد شاخه های درخت و تعداد حلقه های اساسی به تعداد لینک های درخت T است.

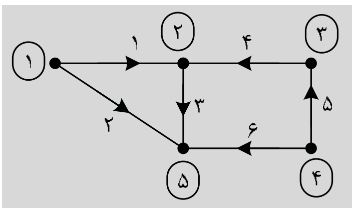
**مثال ۱-۸:**

**برای گراف زیر،**

**الف) تعداد شاخه های درخت و تعداد لینک ها را مشخص نمایید.**

**ب) یک درخت را مشخص نمایید.**

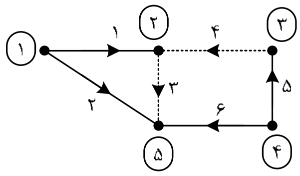
**ج) حلقه ها و کات‌ست های اساسی درخت قسمت ب را مشخص نمایید.**



**حل:**

الف) $\begin{cases} n_t = 5 \\ b = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = n_t - 1 = 4 \\ \ell = b - n = 2 \end{cases}$

ب) هر ۴ شاخه از این گراف که در تعریف درخت صدق کنند، را می توان بعنوان درخت انتخاب نمود. بعنوان مثال:



یک درخت است.

ج) کات‌ست ها و حلقه های اساسی بصورت زیر خواهند بود:

کات‌ست های اساسی: $\begin{cases}\{\boxed{1},3,4\}\\ \{\boxed{2},3,4\}\\ \{\boxed{6},4\}\\ \{\boxed{5},4\}\end{cases}$

حلقه های اساسی: $\begin{cases}\{\boxed{4},1,2,6,5\}\\ \{\boxed{3},1,2\}\end{cases}$

اکنون با استفاده از تعاریف جدید ارائه شده، می توان معادلات جریان و ولتاژ مربوط به کات‌ست ها و حلقه های اساسی گراف مداری را مشخص نموده و با حل آنها ولتاژ و جریان تمام شاخه های مدار را بدست آورد. با دسته بندی معادلات مداری به معادلات مربوط به ولتاژ و معادلات مربوط به جریان شاخه ها دو روش جدید مبتنی بر تعاریف حلقه و کات‌ست ارائه می گردد.

## ۱-۴- تجزیه و تحلیل حلقه:

در روش تجزیه تحلیل حلقه مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱. یک گراف متصل بهم با $b$ شاخه و $n_t$ گره را در نظر گرفته و درخت دلخواه $T$ از آن را انتخاب کنید. این درخت $n=(n_t-1)$ شاخه درخت و $\ell=b-(n_t-1)$ لینک دارد.
۲. لینک ها را از یک تا $\ell$ و شاخه های درخت را از $\ell+1$ تا $b$ شماره گذاری می کنیم.
۳. حلقه های اساسی درخت را مشخص نموده و یک جهت قرار دادی (هم جهت با لینک مربوطه) برای حلقه ها در نظر می‌گیریم.
۴. ماتریس $B$ را که ماتریس حلقه اساسی خوانده می شود بصورت زیر تشکیل می دهیم:

$$B_{\ell\times b}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در حلقه } i \text{ و بوده و جهت قراردادی آنها یکسان باشد :}\\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در حلقه } i \text{ و بوده و جهت قراردادی آنها یکسان نباشد :}\\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ در حلقه } i \text{ نباشد :}\end{cases} \qquad ۱-۲$$

۵. اگر بردار $v_{b\times1}$ را بردار ولتاژ شاخه های گراف در نظر بگیریم. با استفاده از ماتریس $B$ داریم:

$$B.V=0 \qquad ۱-۳$$

که معادله ۱-۳ بیانگر معادلات ولتاژ گراف مداری می باشد. از آنجا که هر حلقه اساسی تنها یک لینک را شامل می شود، داریم:

$$B=\left[I_{\ell\times\ell}\quad|\quad F\right] \qquad ۱-۴$$

که در آن I یک ماتریس یکه $\ell\times\ell$ و F یک ماتریس $\ell\times n$ بدون شرط خاصی می باشد.

۶. اکنون یک ماتریس امپدانس قطری به نام $Z$ تشکیل می دهیم بطوریکه درایه روی قطر اصلی سطر $k$ام آن کل امپدانس موجود در شاخه شماره $k$ باشد.
۷. ماتریس امپدانس حلقه برای درخت $T$ را بصورت زیر محاسبه می کنیم:

$$Z_\ell \triangleq B.Z.B^T \qquad ۱-۵$$

۸. دو بردار با ابعاد $b\times1$ یکی برای منابع ولتاژ شاخه ها ($V_S$) و دیگری برای منابع جریان شاخه های گراف ($J_S$) تشکیل می‌دهیم. برای نوشتن این دو بردار، منابع ولتاژی که جهت قرار دادی جریان آنها هم جهت با شاخه مربوطه باشد، مثبت و در غیر اینصورت منفی در نظر گرفته خواهند شد.

۹. اکنون جریان حلقه های اساسی مدار بصورت زیر بدست می آید:

$$e_s \triangleq -B.V_s + B.Z.J_s \qquad (۶-۱)$$

$$i = Z_\ell^{-1}.e_s \qquad (۷-۱)$$

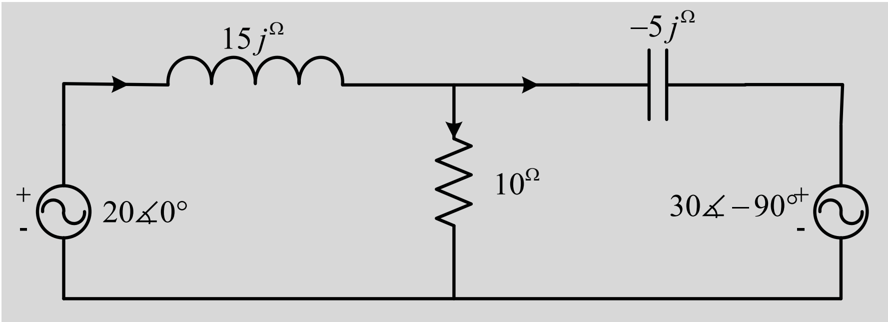
که در آن $i$ یک بردار $\ell \times 1$ شامل جریان حلقه های اساسی می باشد.

**نکته:**

در ترسیم گراف مداری، منابع ولتاژ سری با المان های دیگر/ منابع جریان موازی با المانهای دیگر را مجموعاً یک شاخه در نظر می‌گیریم. قبل از ترسیم گراف مداری، ابتدا مدار را تا جای ممکن ساده می کنیم.

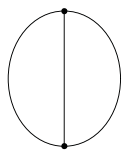
**◄ مثال ۱-۹:**

**جریان شاخه های مدار زیر را به روش حلقه محاسبه نمایید:**

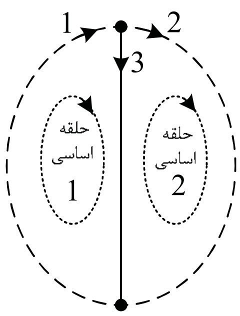



**حل:**

ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم:



این گراف ۲ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم:




$$\begin{cases} n_t = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ \ell = 2 \end{cases}$$

$n=1$ :تعداد شاخه های درخت

$\ell=2$ :تعداد شاخه های لینک

با توجه به این گراف، ماتریس های حلقه و امپدانس بصورت زیر خواهند بود:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{حلقه ۱:} \\ \text{حلقه ۲:} \end{array}$$

$$Z=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}15j & 0 & 0\\ 0 & -5j & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{شاخه ۱:}\\ \text{شاخه ۲:}\\ \text{شاخه ۳:}\end{array}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Z_\ell=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}15j & 0 & 0\\ 0 & -5j & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}15j+0+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0-5j+0\\ 0+0+10 & 0+0-10\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15j & 0\\ 0 & -5j\\ 10 & -10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15j+0+10 & 0+0-10\\ 0+0-10 & 0-5j+10\end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$\begin{cases}20\measuredangle 0^\circ=20(\cos(0)+j\sin(0))=20\\ 30\measuredangle -90^\circ=20(\cos(-90)+j\sin(-90))=-30j\end{cases}$$

$$V_s=\begin{bmatrix}-20\\ -30j\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{منبع شاخه ۱ با جریان شاخه ۱ هم جهت نیست:}\\ \text{منبع شاخه ۲ با جریان شاخه ۲ هم جهت است:}\\ \text{شاخه ۳ منبع ندارد:}\end{array}$$

$$J_s=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad \text{هیچ کدام از شاخه ها منبع جریان ندارند:}$$

اکنون داریم:

$$e_s\triangleq -B.V_s+B.Z.J_s=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-20\\ -30j\\ 0\end{bmatrix}+0=-\begin{bmatrix}-20+0+0\\ 0-30j+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}$$

$$i=Z_\ell^{-1}.e_s=\begin{bmatrix}10+15j & -10\\ -10 & 10-5j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}=\frac{1}{(10+15j)(10-5j)-100}\begin{bmatrix}10-5j & 10\\ 10 & 10+15j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{100-50j+150j-75j^2-100}\begin{bmatrix}10-5j & 10\\ 10 & 10+15j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}=\frac{1}{75+100j}\begin{bmatrix}10-5j & 10\\ 10 & 10+15j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{75+100j}\begin{bmatrix}200-100j+300j\\ 200+300j+450j^2\end{bmatrix}=\frac{1}{75+100j}\begin{bmatrix}200+200j\\ -250+300j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.24-0.32j\\ 0.72+3.04j\end{bmatrix}$$

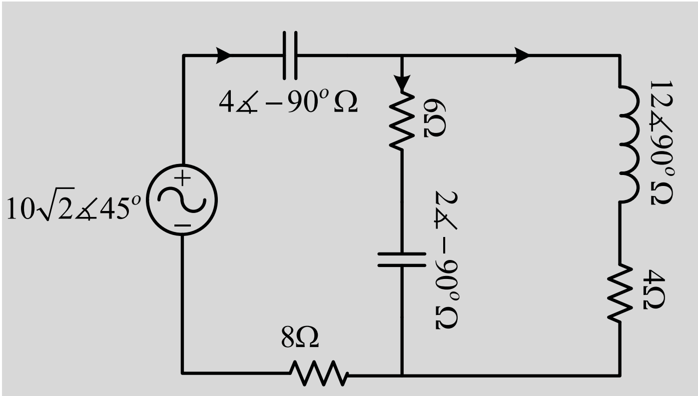
$$\rightarrow\begin{cases}i_1=2.24-0.32j\\ i_2=0.72+3.04j\end{cases}$$

بنابراین اگر جریان شاخه های مدار اصلی را با $J$ نمایش دهیم داریم:

$$\begin{cases}j_1=2.24-0.32j\\ j_2=0.72+3.04j\\ j_3=j_1-j_2=1.53-3.36j\end{cases}$$

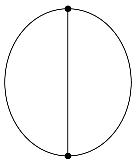
### ◄ مثال ۱-۱۰:

**با استفاده از روش حلقه، ولتاژ مقاومت $4^\Omega$ را محاسبه نمایید:**

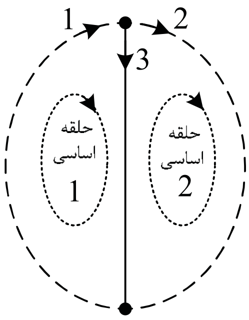



**حل:**

ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم:



این گراف ۲ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم:




$$\begin{cases} n_t = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ \ell = 2 \end{cases}$$

تعداد شاخه های درخت: $n=1$

تعداد شاخه های لینک: $\ell=2$

با توجه به این گراف، ماتریس های حلقه و امپدانس بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{array}{cccc} & \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \\ B = & \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{matrix} \text{حلقه ۱:} \\ \text{حلقه ۲:} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 4\measuredangle 90^\circ = 4j \\ 12\measuredangle 90^\circ = 12j \\ 2\measuredangle -90^\circ = -2j \end{cases} \rightarrow Z = \begin{bmatrix} 8-4j & 0 & 0 \\ 0 & 4+12j & 0 \\ 0 & 0 & 6-2j \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{شاخه ۱:} \\ \text{شاخه ۲:} \\ \text{شاخه ۳:} \end{matrix}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Z_\ell = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 8-4j & 0 & 0 \\ 0 & 4+12j & 0 \\ 0 & 0 & 6-2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 8-4i & 0 \\ 0 & 4+12i \\ 6-2i & -6+2i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8-4i & 0 \\ 0 & 4+12i \\ 6-2i & -6+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14-6i & -6+2i \\ -6+2i & 10+10i \end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$10\sqrt{2}\measuredangle 45^\circ = 10\sqrt{2}(\cos(45)+j\sin(45)) = 10\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 10(1+j)$$

$$V_s = \begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

منبع شاخه ۱ با جریان شاخه۱ هم جهت نیست:

شاخه ۲ منبع ندارد:

شاخه ۳ منبع ندارد:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هیچ کدام از شاخه ها منبع جریان ندارند:

اکنون داریم:

$$e_s \triangleq -B.V_s + B.Z.J_s = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = -\begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10(1+j) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i = Z_\ell^{-1}.e_s = \begin{bmatrix} 14-6i & -6+2i \\ -6+2i & 10+10i \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 10(1+j) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(140-60j+140j+60)-(36-24j-4)}\begin{bmatrix} (10+10j)(10+10j) \\ (6-2j)(10+10j) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{168+104j}\begin{bmatrix} 100+100j+100j-100 \\ 60+60j-20j+20 \end{bmatrix} = \frac{1}{168+104j}\begin{bmatrix} 200j \\ 80-40j \end{bmatrix}$$

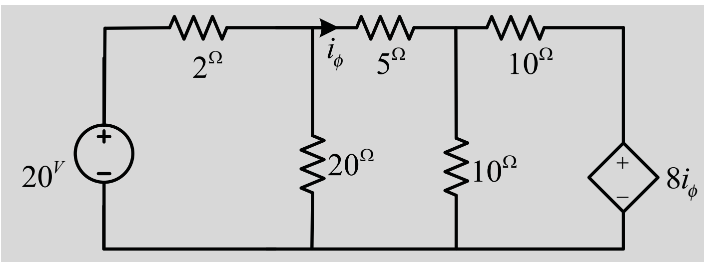
$$\rightarrow \begin{cases} i_1 = 0.5328 + 0.8607j \\ i_2 = 0.4508 - 0.0410j \end{cases}$$

بنابراین ولتاژ شاخه $4^\Omega$ برابر است با:

$$V(4^\Omega) = 4i_2 = 1.8033 - 0.1639j$$

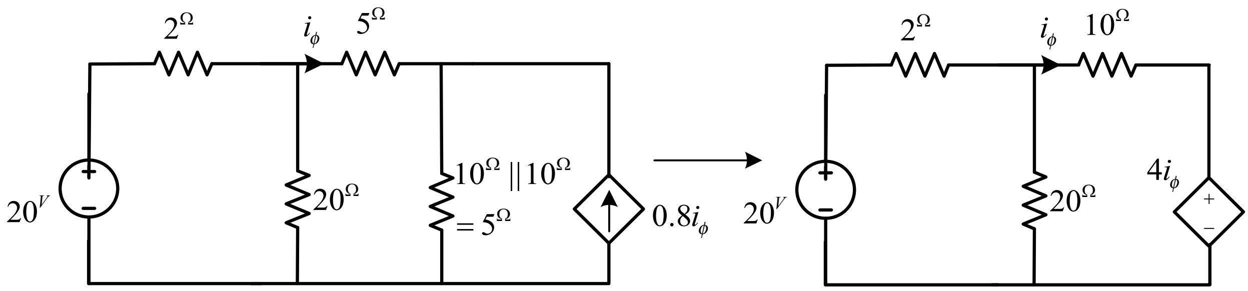
**مثال ۱-۱۱:**

**با استفاده از روش حلقه، جریان مجهول را محاسبه نمایید:**

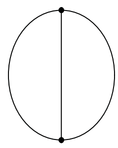



**حل:**

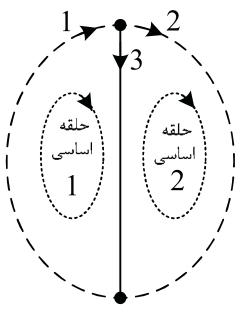
ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم، برای این کار ابتدا مدار را تا جای ممکن ساده می کنیم:




بنابراین:



این گراف ۲ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. توجه کنید که در صورت سوال جهت جریان ها مشخص نشده است. جهت جریان شاخه ها را دلخواه انتخاب نموده و سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم:




$$\begin{cases} n_t = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 1 & \text{تعداد شاخه های درخت:} \\ \ell = 2 & \text{تعداد شاخه های لینک:} \end{cases}$$

با توجه به این گراف، ماتریس های حلقه و امپدانس بصورت زیر خواهند بود:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{حلقه ۱:} \\ \text{حلقه ۲:} \end{array}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{شاخه ۱:} \\ \text{شاخه ۲:} \\ \text{شاخه ۳:} \end{array}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Z_{\ell} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \\ 20 & -20 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم، با توجه به اینکه در این مدار منبع وابسته داریم، باید منبع وابسته را بصورت معادله ای از جریان حلقه های اساسی وارد کنیم. برای این کار می نویسیم:

$$i_{\phi} = i_2 \rightarrow 4 i_{\phi} = 4 i_2$$

بنابراین:

$$V_s = \begin{bmatrix} -20 \\ 4i_\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$
منبع شاخه ۱ با جریان شاخه۱ هم جهت نیست:
منبع شاخه ۲ با جریان شاخه ۲ هم جهت است:
شاخه ۳ منبع ندارد:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
هیچ کدام از شاخه ها منبع جریان ندارند:

اکنون داریم:

$$e_s \triangleq -B.V_s + B.Z.J_s = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -20 \\ 4i_2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = -\begin{bmatrix} -20 \\ 4i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -4i_2 \end{bmatrix}$$

$$i = Z_\ell^{-1}.e_s = \begin{bmatrix} 22 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 20 \\ -4i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1154 & 0.0769 \\ 0.0769 & 0.0846 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ -4i_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} i_1 = 2.3 - 0.3i_2 \\ i_2 = 1.54 - 0.34i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = 2.3 - 0.3i_2 \\ 1.34i_2 = 1.54 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = 2.3 - 0.3\times 1.12 \cong 1.96 \\ i_2 = \dfrac{1.54}{1.34} \simeq 1.12 \end{cases}$$

## ۱-۵- روش تجزیه و تحلیل کات‌ست:

در روش تجزیه تحلیل حلقه مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱. یک گراف متصل بهم با $b$ شاخه و $n_t$ گره را در نظر گرفته و درخت دلخواه $T$ از آن را انتخاب کنید. این درخت $n=(n_t-1)$ شاخه درخت و $\ell = b-(n_t-1)$ لینک دارد.
۲. لینک ها را از یک تا $\ell$ و شاخه های درخت را از $\ell+1$ تا $b$ شماره گذاری می کنیم.
۳. کات‌ست های اساسی درخت را مشخص نموده و یک جهت قرار دادی (هم جهت با شاخه درخت مربوطه) برای کات‌ست ها در نظر می‌گیریم.
۴. ماتریس $Q$ را که ماتریس کات‌ست اساسی خوانده می شود، بصورت زیر تشکیل می دهیم:

$$Q_{n\times b} = \begin{cases} 1 & \text{: اگر شاخه } k \text{ در کات ست } i \text{ و بوده و جهت قراردادی آنها یکسان باشد} \\ -1 & \text{: اگر شاخه } k \text{ در کات ست } i \text{ و بوده و جهت قراردادی آنها یکسان نباشد} \\ 0 & \text{: اگر شاخه } k \text{ در کات ست } i \text{ نباشد} \end{cases} \qquad ۱-۸$$

۵. اگر بردار $J_{b\times 1}$ را بردار جریان شاخه های گراف در نظر بگیریم. با استفاده از ماتریس $Q$ داریم:

$$Q.J = 0 \qquad ۱-۹$$

که معادله ۱-۹ بیانگر معادلات جریان گراف مداری می باشد. از آنجا که هر کات‌ست اساسی تنها یک شاخه اساسی را شامل می‌شود، داریم:

$$Q = \begin{bmatrix} E & | & I_{n\times n} \end{bmatrix} \qquad ۱-۱۰$$

که در آن $\mathrm{I}$ یک ماتریس یکه $n\times n$ و $\mathrm{E}$ یک ماتریس $n\times \ell$ بدون شرط خاصی می باشد.

۶. اکنون یک ماتریس ادمیتانس قطری به نام $Y$ تشکیل می دهیم بطوریکه درایه روی قطر اصلی سطر $k$ام آن کل ادمیتانس موجود در شاخه شماره $k$ باشد.

۷. ماتریس ادمیتانس کات‌ست برای درخت $T$ را بصورت زیر محاسبه می کنیم:

$$Y_q \triangleq Q.Y.Q^T \qquad ۱۱-۱$$

۸. دو بردار با ابعاد $b\times 1$ یکی برای منابع ولتاژ شاخه ها ($V_S$) و دیگری برای منابع جریان شاخه های گراف ($J_S$) تشکیل می‌دهیم. منابع جریانی که هم جهت با شاخه هستند را مثبت و بقیه را منفی در نظر می گیریم.

۹. اکنون ولتاژ کات‌ست های اساسی مدار بصورت زیر بدست می آید:

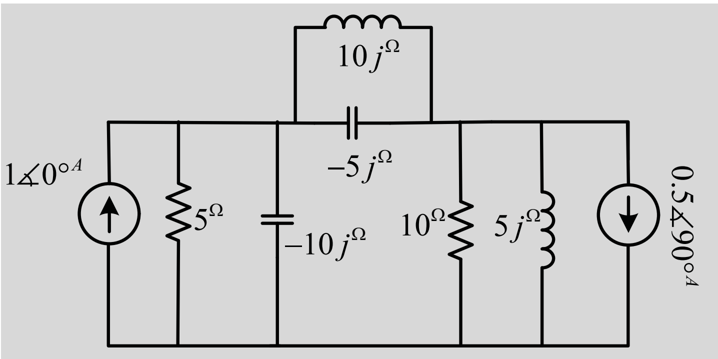
$$i_s \triangleq -Q.J_s + Q.Y.V_s \qquad ۱۲-۱$$

$$e = Y_q^{-1}.i_s \qquad ۱۳-۱$$

که در آن $e$ یک بردار $n\times 1$ شامل ولتاژ کات‌ست های اساسی می باشد.

### مثال ۱-۱۲:

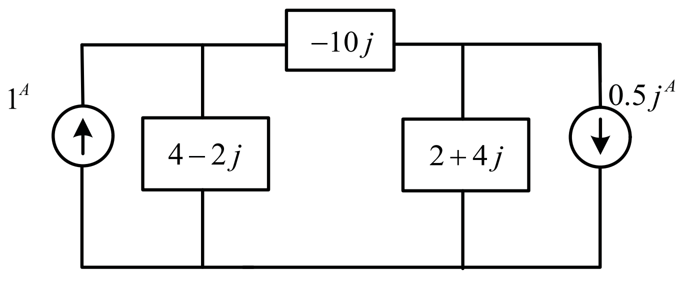
**ولتاژ شاخه های مدار زیر را به روش کات‌ست محاسبه نمایید:**



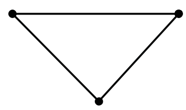

**حل:**

ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم، برای این کار ابتدا مدار را تا جای ممکن ساده می کنیم:

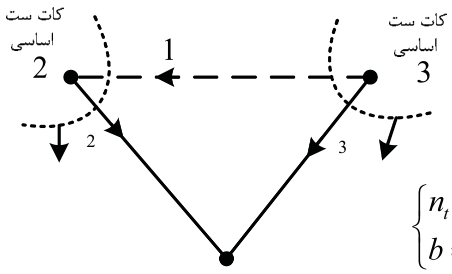
$$\begin{cases} -10j \,||\, 5 = \dfrac{-50j}{5-10j} = 4-2j \\ 10j \,||\, -5j = \dfrac{10j\times(-5j)}{10j-5j} = \dfrac{-50j^2}{5j} = -10j \\ 10 \,||\, 5j = \dfrac{50j}{10+5j} = 2+4j \\ 1\measuredangle 0^\circ = 1 \\ 0.5\measuredangle 90^\circ = 0.5j \end{cases} \rightarrow$$




بنابراین:



این گراف ۳ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم: (جهت جریان شاخه ها دلخواه انتخاب شده است.)




$$\begin{cases} n_t = 3 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ \ell = 1 \end{cases}$$ تعداد شاخه های درخت:

با توجه به این گراف، ماتریس های کات‌ست و ادمیتانس بصورت زیر خواهند بود:

$$Q = \begin{array}{c} \text{شاخه ۱} \quad \text{شاخه ۲} \quad \text{شاخه ۳} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{:کات ست ۲} \\ \text{:کات ست ۳} \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{c} \text{شاخه ۱} \qquad \text{شاخه ۲} \qquad \text{شاخه ۳} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{-10j} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{4-2j} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2+4j} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0.1j & 0 & 0 \\ 0 & 0.2+0.1j & 0 \\ 0 & 0 & 0.1-0.2j \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Y_q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1j & 0 & 0 \\ 0 & 0.2+0.1j & 0 \\ 0 & 0 & 0.1-0.2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -0.1j & 0.1j \\ 0.2+0.1j & 0 \\ 0 & 0.1-0.2j \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1j & 0.1j \\ 0.2+0.1j & 0 \\ 0 & 0.1-0.2j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2+0.2j & -0.1j \\ -0.1j & 0.1-0.1j \end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ منبع ولتاژ در مدار نداریم:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0.5j \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{:شاخه ۱ منبع ندارد} \\ \text{:منبع شاخه ۲ با جریان شاخه۲ هم جهت نیست} \\ \text{:منبع شاخه ۳ با جریان شاخه۳ هم جهت است} \end{array}$$

اکنون داریم:

$$i_s \triangleq -Q.J_s + 0 = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0.5j \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 0.5j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5j \end{bmatrix}$$

اکنون اگر ولتاژ شاخه های درخت را با $e$ و ولتاژ شاخه های گراف را با $V$ نمایش دهیم داریم:

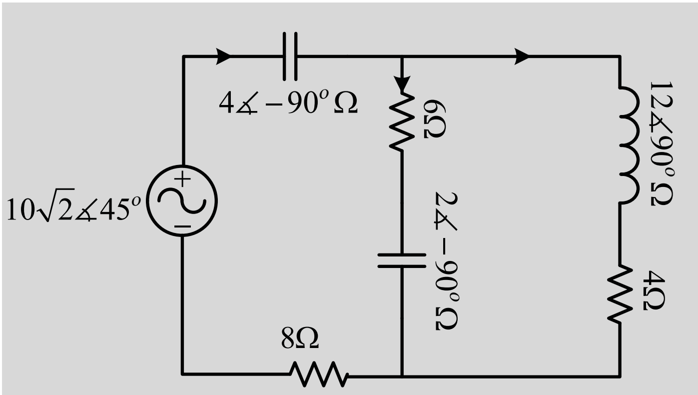
$$e = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2+0.2j & -0.1j \\ -0.1j & 0.1-0.1j \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(0.2+0.2j)(0.1-0.1j)-(0.1j)^2}\begin{bmatrix} 0.1-0.1j & 0.1j \\ 0.1j & 0.2+0.2j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2j \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} V_1 = e_3 - e_2 = (2)-(3-2j) = -1+2j \\ V_2 = e_2 = 3-2j \\ V_3 = e_3 = 2 \end{cases}$$

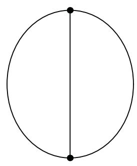
**◄ مثال ۱-۱۳:**

**با استفاده از روش کات‌ست، ولتاژ مقاومت $4^{\Omega}$ را محاسبه نمایید:**

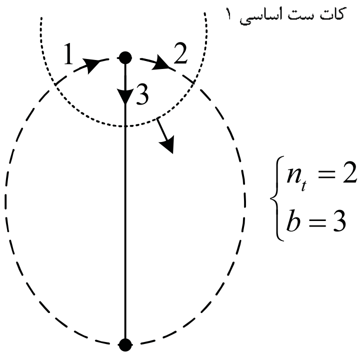



**حل:**

ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم:



این گراف ۲ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم:




$$\begin{cases} n_t = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 1 & \text{تعداد شاخه های درخت:} \\ \ell = 2 & \text{تعداد شاخه های لینک:} \end{cases}$$

با توجه به این گراف، ماتریس های کات‌ست و ادمیتانس بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{array}{cccc} & \text{شاخه ۱} & \text{شاخه ۲} & \text{شاخه ۳} \\ Q = & \left[-1\right. & 1 & \left.1\right] \end{array}$$ کات ست ۱:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱} & \text{شاخه ۲} & \text{شاخه ۳} \end{array} \\ Y = & \begin{bmatrix} \frac{1}{8-4j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4+12j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6-2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1+0.05j & 0 & 0 \\ 0 & 0.025-0.075j & 0 \\ 0 & 0 & 0.15+0.05j \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Y_q = [-1 \quad 1 \quad 1]\underbrace{\begin{bmatrix} 0.1+0.05j & 0 & 0 \\ 0 & 0.025-0.075j & 0 \\ 0 & 0 & 0.15+0.05j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -0.1-0.05j \\ 0.025-0.075 \\ 0.165 \end{bmatrix}} = [-1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} -0.1-0.05j \\ 0.025-0.075j \\ 0.165 \end{bmatrix} = 0.275 + 0.025j$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$V_s = \begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

منبع شاخه ۱ با جریان شاخه هم جهت نیست:

شاخه ۲ منبع ندارد:

شاخه ۳ منبع ندارد:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ هیچ کدام از شاخه ها منبع جریان ندارند:

اکنون داریم:

$$i_s \triangleq 0 + Q.Y.V_s = [-1 \quad 1 \quad 1]\underbrace{\begin{bmatrix} 0.1+0.05j & 0 & 0 \\ 0 & 0.025-0.075j & 0 \\ 0 & 0 & 0.15+0.05j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -0.5-1.5j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = 0.5+1.5j$$

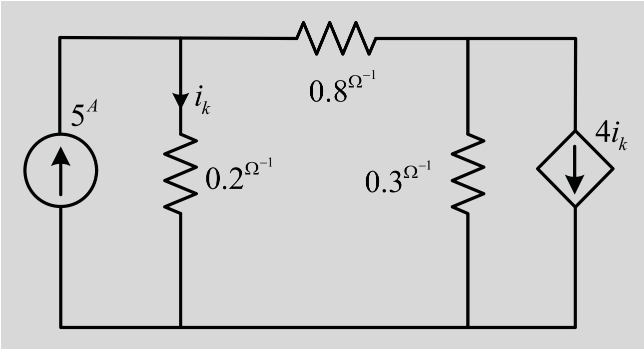
اکنون اگر ولتاژ شاخه های درخت را با $e$ و ولتاژ شاخه های گراف را با $V$ نمایش دهیم داریم:

$$e = [e_3] = Y_q^{-1} i_s = \left(\frac{1}{0.275 + 0.025j}\right)(0.5+1.5j) = 2.2951 + 5.2459j$$

$$V(4^{\Omega}) = \left(\frac{4}{4+12j}\right) e_3 = 1.8033 - 0.1639j$$

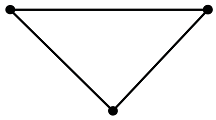
**◄ مثال ۱-۱۴:**

**با استفاده از روش کات‌ست، مدار زیر را تحلیل نمایید:**

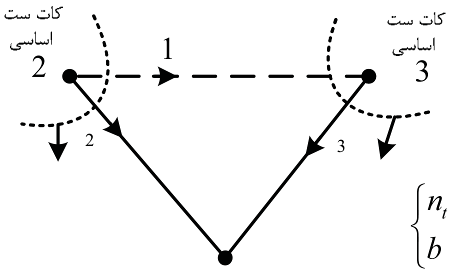



**حل:**

بنابراین:



این گراف ۳ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم: (جهت جریان شاخه ها دلخواه انتخاب شده است.)




تعداد شاخه های درخت: $\begin{cases} n_t = 3 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ \ell = 1 \end{cases}$

با توجه به این گراف، ماتریس های کات‌ست و ادمیتانس بصورت زیر خواهند بود:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{:کات ست ۲} \\ \text{:کات ست ۳} \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Y_q=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}0.8&0&0\\0&0.2&0\\0&0&0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}0.8&-0.8\\0.2&0\\0&0.3\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8&-0.8\\0.2&0\\0&0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-0.8\\-0.8&1.1\end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$V_s=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$ منبع ولتاژ در مدار نداریم:

$$J_s=\begin{bmatrix}0\\-5\\4i_k\end{bmatrix}$$

شاخه ۱ منبع ندارد:
منبع شاخه ۲ با شاخه ۲ هم جهت نیست:
منبع شاخه ۳ با شاخه۳ هم جهت است:

اکنون داریم:

$$i_s\triangleq -Q.J_s+0=-\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-5\\4i_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-4i_k\end{bmatrix}$$

اکنون باید جریان مجهول را به ولتاژ شاخه های درخت تبدیل کنیم:

$$i_k=0.2e_2\rightarrow i_s=\begin{bmatrix}5\\-0.8e_2\end{bmatrix}$$

اکنون اگر ولتاژ شاخه های درخت را با $e$ و ولتاژ شاخه های گراف را با $V$ نمایش دهیم داریم:

$$e=\begin{bmatrix}e_2\\e_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-0.8\\-0.8&1.1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\-0.8e_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.4&1.74\\1.74&2.17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-0.8e_2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}e_2=12-1.4e_2\\e_3=8.7-1.74e_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2.4e_2=12\\e_3=8.7-1.74e_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}e_2=5^V\\e_3=8.7-1.74\times 5\cong 0^V\end{cases}$$

$$\begin{cases}V_1=e_2-e_3=5^V\\V_2=e_2=5^V\\V_3=e_3=0^V\end{cases}$$