بسم الله

نام درس:

مدارهای الکتریکی ۲

ویرایش ششم

مدرس:

ذاکر حقیقی

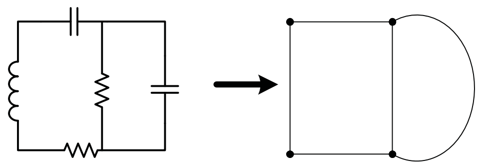
بخش اول

بخش اول: گراف های شبکه و تجزیه و تحلیل حلقه و کات‌ست

۱-۱- مقدمه

در تمام روش های تحلیل مدار که در درس مدارهای الکتریکی ۱ آموختیم، فرض اولیه مسطح بودن گراف مداری بود. در این بخش به معرفی روش های تحلیل کات‌ست و حلقه می پردازیم که نسبت به روش های گره و مش دارای انعطاف پذیری بیشتری بوده و از جمله کاربردهای آن در شبکه ها با گراف غیرمسطح می باشد.

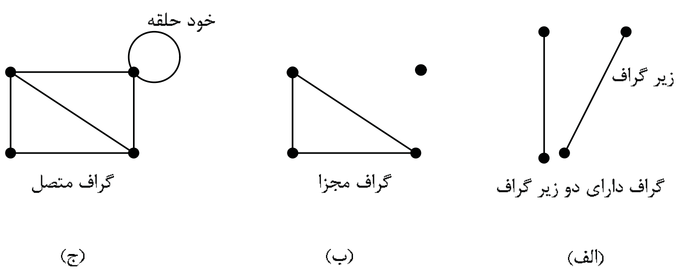
در این فصل مدارهای الکتریکی را بعنوان یک گراف مورد بررسی قرار می دهیم یعنی اجزای مداری را حذف و فقط گره ها و شاخه ها را در نظر می گیریم:



شکل ۱-۱: تبدیل مدار به گراف

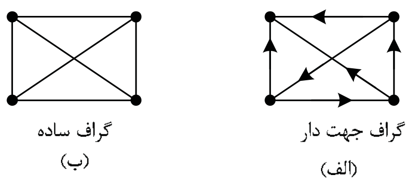
یادآوری:

منظور از گراف، دسته ای از گره ها به همراه دسته ای از شاخه ها می باشد بطوریکه به هر دو سر هر شاخه، یک گره متصل باشد.



شکل ۱-۲: انواع گراف

اگر شاخه های گراف، پیکان جهت دار، گراف را جهت دار گویند:



شکل ۱-۳: گراف جهت دار و ساده

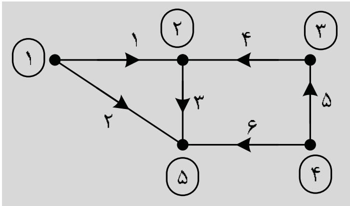
برای هر گراف جهت دار یک ماتریس متناظر به نام ماتریس تلاقی تعریف می گردد. فرض کنید که یک گراف شامل b شاخه و n_t گره باشد. ماتریس تلاقی گره با شاخه A_a به یک ماتریس با ابعاد $n_t \times b$ گفته می شود بطوریکه داشته باشیم:

$$= \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } i \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases} \qquad ۱-۱$$

از آنجا که هر شاخه از یک گره خارج شده و به یک گره دیگر وارد می شود، هر ستون ماتریس A_a فقط شامل یک 1 و یک -1 بوده و تمام درایه های دیگر آن صفر است.

◄ مثال ۱-۱:

ماتریس تلاقی گراف شکل زیر را مشخص نمایید:



حل:

ماتریس تلاقی بصورت زیر خواهد بود:

$$A_a = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array}$$

شماره گره

شماره شاخه

۱-۲- کات‌ست ها و قانون جریان کیرشف:

اگر گره های یک شبکه مداری را توسط یک سطح گوسی به دو دسته تقسیم کنیم، بطوریکه دسته ای از گره ها در داخل و دسته دیگر خارج آن باشند، قانون جریان کیرشف لازم می دارد که مجموع جبری جریان های که از سطح گوسی خارج و یا داخل می شوند، مساوی صفر باشد. با این تعمیم از قانون جریان کیرشف به تعریف جدیدی می رسیم:

تعریف:

دسته ای از شاخه های یک گراف پیوسته را **کات‌ست** گویند، چنانچه:

الف) حذف تمام شاخه های این دسته موجب شود که گراف باقیمانده دارای دو جزء جدا از هم باشد.

ب) حذف تمام شاخه های این دسته بجز یکی از آنها گراف را پیوسته باقی گذارد.

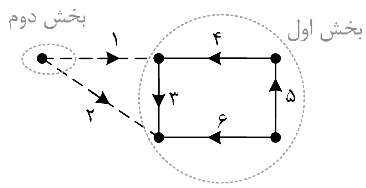
◄ مثال ۱-۲:

برای گراف مداری مثال ۱-۱ کدام یک از دسته شاخه های معرفی شده زیر کات‌ست می باشد:

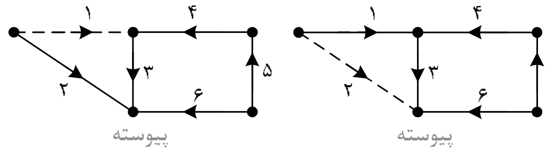
۱) $\{1,2\}$

حل:

برای بررسی کات‌ست بودن شاخه باید دو شرط تعریف فوق را بررسی نماییم؛ برای بررسی شرط اول ابتدا تمام شاخه های بیان شده را حذف می کنیم تا مشخص شود که آیا گراف به دو قسمت تقسیم می گردد یا خیر؟



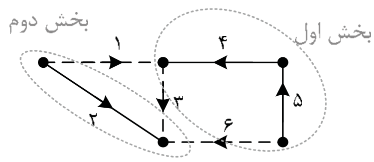
اکنون که این شرط برقرار است، بررسی می کنیم که آیا رسم هر یک از شاخه های حذف شده به تنهایی گراف را پیوسته می کند یا خیر؟



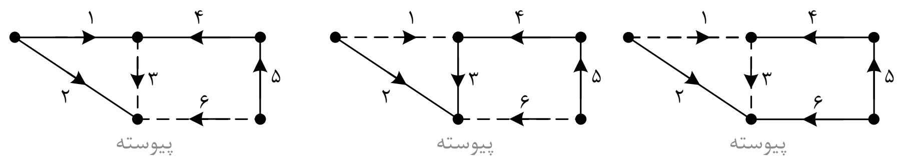
بنابراین این دسته شاخه ها کات‌ست هستند.

۲) $\{1,3,6\}$

حل:



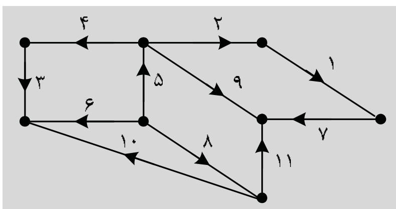
اکنون که این شرط برقرار است، بررسی می کنیم که آیا رسم هر یک از شاخه های حذف شده به تنهایی گراف را پیوسته می کند یا خیر؟



بنابراین این دسته شاخه ها کات‌ست هستند.

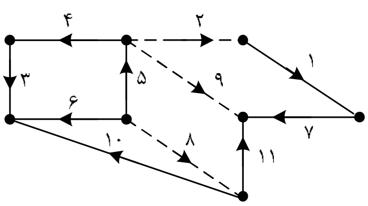
مثال ۱-۳:

برای گراف مداری زیر کدام یک از دسته شاخه های معرفی شده زیر کات‌ست می باشد:



۱) $\{2,9,8\}$

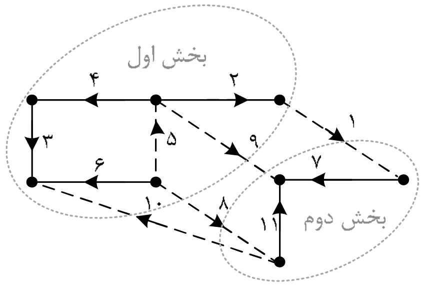
حل:



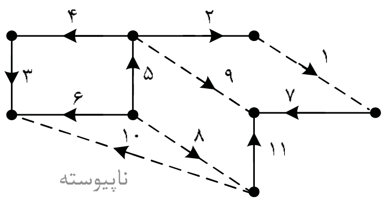
گراف مجزا نخواهد شد بنابرین کات‌ست نیست.

۲) $\{1,9,8,10,5\}$

حل:



اکنون که این شرط برقرار است، بررسی می کنیم که آیا رسم هر یک از شاخه های حذف شده به تنهایی گراف را پیوسته می کند یا خیر؟



بنابراین این دسته شاخه ها کات‌ست نیستند.

اکنون با دانستن تعریف کات‌ست، قانون جریان کیرشف را مجدداً بررسی می کنیم:

قانون جریان کیرشف (KCL) برای کات‌ست:

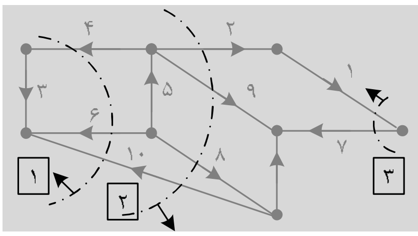
برای هر شبکه فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از کات‌ست های آن، جمع جبری جریان تمام شاخه های هر کات‌ست آن مساوی صفر است.

نکته: برای تعیین علامت جبری هر کات‌ست، ابتدا یک جهت دلخواه برای کات‌ست در نظر می گیریم و سپس در نوشتن معادله جریان، جریان های هم جهت با کات‌ست را مثبت و جریان های خلاف جهت با آن را منفی لحاظ می کنیم.

نکته: تمام شاخه های متصل به یک گره در گراف مداری کات‌ست خواهند بود.

مثال ۱-۴:

برای کات‌ست های نشان داده شده در گراف مداری مثال ۱-۳ قانون KCL را بیان کنید:



حل:

کات‌ست شماره ۱: $i_4+i_6+i_{10}=0$

کات‌ست شماره ۲: $i_2+i_9+i_8-i_{10}=0$

کات‌ست شماره ۳: $-i_1+i_7=0$

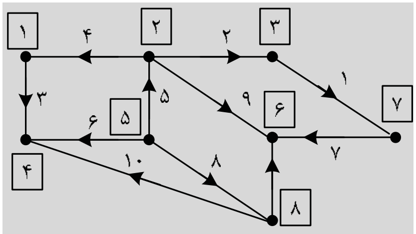
۱-۳- حلقه ها و قانون ولتاژ کیرشف:

تعریف:
یک زیرگراف از گراف اصلی مداری را **حلقه** گویند اگر:

الف) شاخه های این زیر گراف متصل باشند.
ب) با شروع از هر گره در مسیر ایجاد شده توسط شاخه های این زیرگراف از هر گره تنها یکبار عبور کنیم و مجددا به گره اول بازگردیم.

◄ مثال ۱-۵:

برای گراف مداری زیر کدام یک از دسته شاخه های معرفی شده زیر حلقه می باشند:



۱) $\{4,5,6,3\}$

حل:
این چهار شاخه متصل هستند و با شروع از هر گره می توان با عبور از این چهار شاخه مجددا به گره اصلی بازگشت. بنابراین مسیر این شاخه ها را حلقه گویند.

۲) $\{4,2,1,7,9\}$

حل:
این پنج شاخه متصل هستند اما با شروع از گره ۱ نمی توان با عبور از این پنج شاخه مجددا به گره ۱ بازگشت. بنابراین حلقه نیست.

۳) $\{6,5,7\}$

حل:
این سه شاخه متصل نیستند. بنابراین حلقه تشکیل نمی دهند.

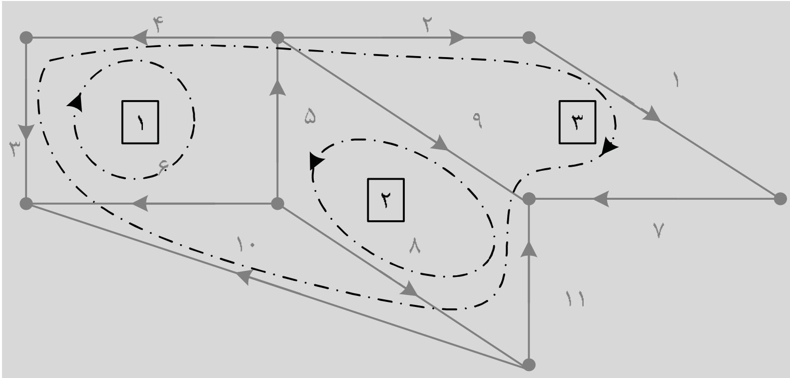
بنابراین این دسته شاخه ها کات‌ست نیستند.

قانون ولتاژ کیرشف (KVL) برای حلقه:
برای هر شبکه فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از حلقه های آن، جمع جبری ولتاژ شاخه های هر حلقه مساوی صفر است.

نکته: برای تعیین علامت جبری هر حلقه، ابتدا یک جهت دلخواه برای آم در نظر می گیریم و سپس در نوشتن معادله ولتاژ، شاخه های هم جهت با حلقه را مثبت و شاخه های خلاف جهت با آن را منفی لحاظ می کنیم.

◄ مثال ۱-۶:

برای گراف مداری زیر قانون KVL را بیان نمایید.



حل:

حلقه شماره ۱: $-v_4 - v_5 + v_6 - v_3 = 0$

حلقه شماره ۲: $-v_5 + v_8 + v_{11} - v_9 = 0$

حلقه شماره ۳: $-v_4 + v_2 + v_1 + v_7 - v_{11} + v_{10} - v_3 = 0$

اکنون که با تعاریف کات‌ست و حلقه آشنا شدیم، می توانیم به تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی با استفاده از روش های مبتنی بر کات‌ست و حلقه بپردازیم. این روشها عموماً روشهایی برای حل مدار های پیچیده می باشند. با بیان چند نکته دیگر، بحث در خصوص این روش ها را آغاز می کنیم:

تعریف:

یک زیر گراف از گراف مداری را **درخت** گویند، اگر:

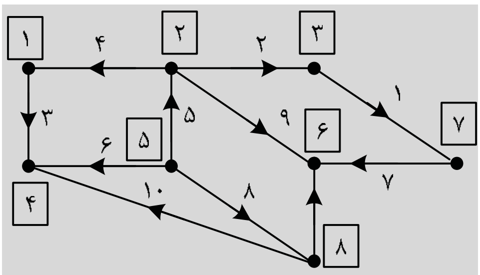
الف) زیرگراف متصل باشد.

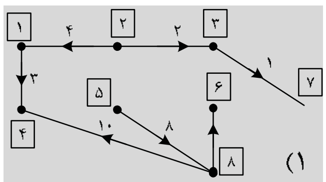
ب) شامل تمام گره های گراف اصلی باشد.

ج) شامل هیچ حلقه ای نباشد.

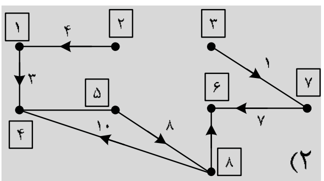
مثال ۱-۷:

برای حلقه های مشخص شده در گراف مداری زیر، قانون ولتاژ کیرشف را بیان نمایید:

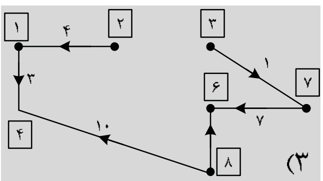




هر سه شرط را داراست، بنابراین درخت است.

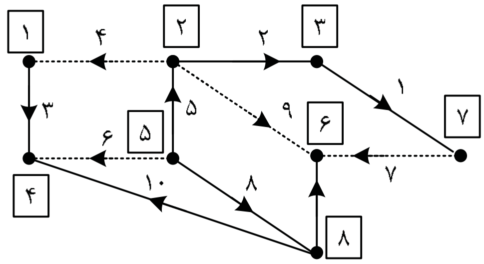


حلقه دارد پس درخت نیست.



گره ۵ را شامل نمی شود، درخت نیست.

تعریف: برای هر درخت از گراف اصلی، شاخه هایی از گراف را که شاخه درخت نباشند، **لینک** گویند. بطور مثال در گراف زیر شاخه های خط چین، لینک های درخت مشخص شده می باشند:



نکات مهم:

اگر یک گراف مداری، شامل n_t گره و b شاخه باشد، هر درخت از این گراف، دارای $n=n_t-1$ شاخه و $\ell=b-(n_t-1)$ یا $\ell=b-n$ لینک خواهد بود.

تعداد درخت های ممکن قابل ترسیم بر روی یک گراف شامل n_t گره برابر $n_t^{n_t-2}$ می باشد.

قضیه:

گراف متصل g با n_t گره و b شاخه و یک درخت T از آن را در نظر بگیرید:

- میان هر جفت گره از g ، مسیر یکتایی از روی شاخه های درخت وجود دارد.
- هر لینک از T و مسیر یکتای میان گره های دو سر آن روی شاخه های T، حلقه یکتایی به نام **حلقه اساسی** تشکیل می‌دهند.
- هر شاخه از درخت T به همراه برخی از لینکهای آن که در تعریف کات‌ست صدق کنند، کات‌ست یکتایی به نام **کات‌ست اساسی** تشکیل می دهند.
- تعداد کات‌ست های اساسی به تعداد شاخه های درخت و تعداد حلقه های اساسی به تعداد لینک های درخت T است.

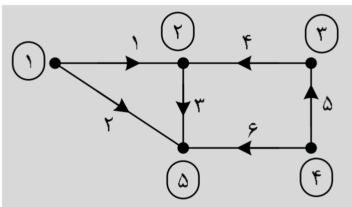
مثال ۱-۸:

برای گراف زیر،

الف) تعداد شاخه های درخت و تعداد لینک ها را مشخص نمایید.

ب) یک درخت را مشخص نمایید.

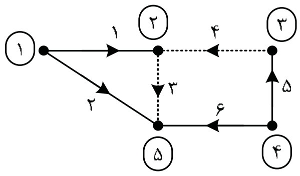
ج) حلقه ها و کات‌ست های اساسی درخت قسمت ب را مشخص نمایید.



حل:

الف) $\begin{cases} n_t = 5 \\ b = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = n_t - 1 = 4 \\ \ell = b - n = 2 \end{cases}$

ب) هر ۴ شاخه از این گراف که در تعریف درخت صدق کنند، را می توان بعنوان درخت انتخاب نمود. بعنوان مثال:



یک درخت است.

ج) کات‌ست ها و حلقه های اساسی بصورت زیر خواهند بود:

کات‌ست های اساسی: $\begin{cases} \{\boxed{1},3,4\} \\ \{\boxed{2},3,4\} \\ \{\boxed{6},4\} \\ \{\boxed{5},4\} \end{cases}$

حلقه های اساسی: $\begin{cases} \{\boxed{4},1,2,6,5\} \\ \{\boxed{3},1,2\} \end{cases}$

اکنون با استفاده از تعاریف جدید ارائه شده، می توان معادلات جریان و ولتاژ مربوط به کات‌ست ها و حلقه های اساسی گراف مداری را مشخص نموده و با حل آنها ولتاژ و جریان تمام شاخه های مدار را بدست آورد. با دسته بندی معادلات مداری به معادلات مربوط به ولتاژ و معادلات مربوط به جریان شاخه ها دو روش جدید مبتنی بر تعاریف حلقه و کات‌ست ارائه می گردد.

۱-۴- تجزیه و تحلیل حلقه:

در روش تجزیه تحلیل حلقه مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱. یک گراف متصل بهم با b شاخه و n_t گره را در نظر گرفته و درخت دلخواه T از آن را انتخاب کنید. این درخت $n=(n_t-1)$ شاخه درخت و $\ell=b-(n_t-1)$ لینک دارد.

۲. لینک ها را از یک تا ℓ و شاخه های درخت را از $\ell+1$ تا b شماره گذاری می کنیم.

۳. حلقه های اساسی درخت را مشخص نموده و یک جهت قرار دادی (هم جهت با لینک مربوطه) برای حلقه ها در نظر می‌گیریم.

۴. ماتریس B را که ماتریس حلقه اساسی خوانده می شود بصورت زیر تشکیل می دهیم:

$$B_{\ell\times b}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در حلقه } i \text{ و بوده و جهت قراردادی آنها یکسان باشد :}\\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در حلقه } i \text{ و بوده و جهت قراردادی آنها یکسان نباشد :}\\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ در حلقه } i \text{ نباشد :}\end{cases} \qquad ۲-۱$$

۵. اگر بردار $v_{b\times1}$ را بردار ولتاژ شاخه های گراف در نظر بگیریم. با استفاده از ماتریس B داریم:

$$B.V=0 \qquad ۳-۱$$

که معادله ۱-۳ بیانگر معادلات ولتاژ گراف مداری می باشد. از آنجا که هر حلقه اساسی تنها یک لینک را شامل می شود، داریم:

$$B=\left[I_{\ell\times\ell} \quad | \quad F\right] \qquad ۴-۱$$

که در آن I یک ماتریس یکه $\ell\times\ell$ و F یک ماتریس $\ell\times n$ بدون شرط خاصی می باشد.

۶. اکنون یک ماتریس امپدانس قطری به نام Z تشکیل می دهیم بطوریکه درایه روی قطر اصلی سطر kام آن کل امپدانس موجود در شاخه شماره k باشد.

۷. ماتریس امپدانس حلقه برای درخت T را بصورت زیر محاسبه می کنیم:

$$Z_\ell \triangleq B.Z.B^T \qquad ۵-۱$$

۸. دو بردار با ابعاد $b\times1$ یکی برای منابع ولتاژ شاخه ها (V_S) و دیگری برای منابع جریان شاخه های گراف (J_S) تشکیل می‌دهیم. برای نوشتن این دو بردار، منابع ولتاژی که جهت قرار دادی جریان آنها هم جهت با شاخه مربوطه باشد، مثبت و در غیر اینصورت منفی در نظر گرفته خواهند شد.

۹. اکنون جریان حلقه های اساسی مدار بصورت زیر بدست می آید:

$$e_s \triangleq -B.V_s + B.Z.J_s \qquad (۱-۶)$$

$$i = Z_\ell^{-1}.e_s \qquad (۱-۷)$$

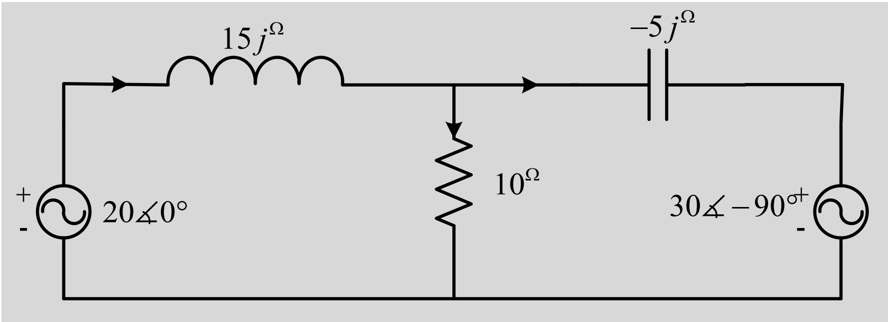
که در آن i یک بردار $\ell \times 1$ شامل جریان حلقه های اساسی می باشد.

نکته:

در ترسیم گراف مداری، منابع ولتاژ سری با المان های دیگر/ منابع جریان موازی با المانهای دیگر را مجموعاً یک شاخه در نظر می‌گیریم.
قبل از ترسیم گراف مداری، ابتدا مدار را تا جای ممکن ساده می کنیم.

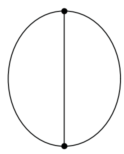
◀ مثال ۱-۹:

جریان شاخه های مدار زیر را به روش حلقه محاسبه نمایید:

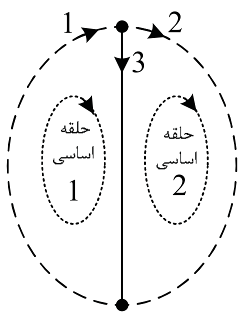


حل:

ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم:



این گراف ۲ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم:



$$\begin{cases} n_t = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 1 & \text{:تعداد شاخه های درخت} \\ \ell = 2 & \text{:تعداد شاخه های لینک} \end{cases}$$

با توجه به این گراف، ماتریس های حلقه و امپدانس بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{array}{cccc} & \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \\ B = & \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\right] & & \end{array} \begin{matrix} \text{:حلقه ۱} \\ \text{:حلقه ۲} \end{matrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix}15j & 0 & 0\\ 0 & -5j & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{:شاخه ۱}\\ \text{:شاخه ۲}\\ \text{:شاخه ۳}\end{matrix}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Z_\ell=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}15j & 0 & 0\\ 0 & -5j & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}15j+0+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0-5j+0\\ 0+0+10 & 0+0-10\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15j & 0\\ 0 & -5j\\ 10 & -10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15j+0+10 & 0+0-10\\ 0+0-10 & 0-5j+10\end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$\begin{cases}20\measuredangle 0^\circ=20(\cos(0)+j\sin(0))=20\\ 30\measuredangle -90^\circ=20(\cos(-90)+j\sin(-90))=-30j\end{cases}$$

$$V_s=\begin{bmatrix}-20\\ -30j\\ 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{:منبع شاخه ۱ با جریان شاخه ۱ هم جهت نیست}\\ \text{:منبع شاخه ۲ با جریان شاخه ۲ هم جهت است}\\ \text{:شاخه ۳ منبع ندارد}\end{matrix}$$

$$J_s=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad\text{:هیچ کدام از شاخه ها منبع جریان ندارند}$$

اکنون داریم:

$$e_s\triangleq -B.V_s+B.Z.J_s=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-20\\ -30j\\ 0\end{bmatrix}+0=-\begin{bmatrix}-20+0+0\\ 0-30j+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}$$

$$i=Z_\ell^{-1}.e_s=\begin{bmatrix}10+15j & -10\\ -10 & 10-5j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}=\frac{1}{(10+15j)(10-5j)-100}\begin{bmatrix}10-5j & 10\\ 10 & 10+15j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{100-50j+150j-75j^2-100}\begin{bmatrix}10-5j & 10\\ 10 & 10+15j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}=\frac{1}{75+100j}\begin{bmatrix}10-5j & 10\\ 10 & 10+15j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 30j\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{75+100j}\begin{bmatrix}200-100j+300j\\ 200+300j+450j^2\end{bmatrix}=\frac{1}{75+100j}\begin{bmatrix}200+200j\\ -250+300j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.24-0.32j\\ 0.72+3.04j\end{bmatrix}$$

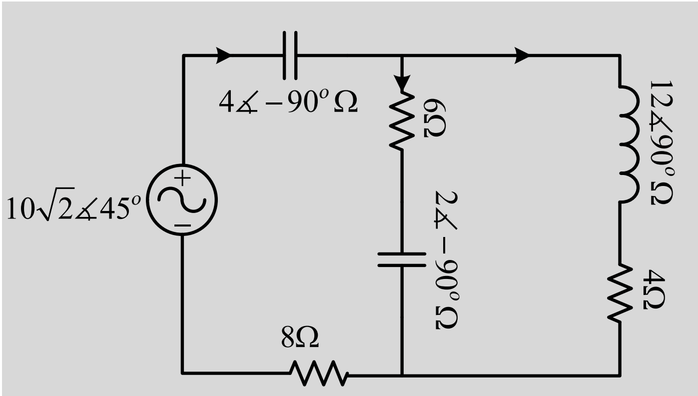
$$\rightarrow\begin{cases}i_1=2.24-0.32j\\ i_2=0.72+3.04j\end{cases}$$

بنابراین اگر جریان شاخه های مدار اصلی را با J نمایش دهیم داریم:

$$\begin{cases}j_1=2.24-0.32j\\ j_2=0.72+3.04j\\ j_3=j_1-j_2=1.53-3.36j\end{cases}$$

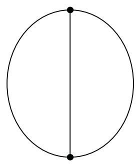
◄ مثال ۱-۱۰:

با استفاده از روش حلقه، ولتاژ مقاومت 4^Ω را محاسبه نمایید:

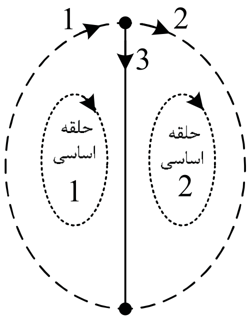


حل:

ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم:



این گراف ۲ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم:



$$\begin{cases} n_t = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ \ell = 2 \end{cases}$$
تعداد شاخه های درخت: $n=1$
تعداد شاخه های لینک: $\ell=2$

با توجه به این گراف، ماتریس های حلقه و امپدانس بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{array}{cccc} & \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \\ B = & \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\right] & & \begin{matrix} \text{حلقه ۱:} \\ \text{حلقه ۲:} \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} 4\measuredangle 90^\circ = 4j \\ 12\measuredangle 90^\circ = 12j \\ 2\measuredangle -90^\circ = -2j \end{cases} \rightarrow \quad Z = \begin{bmatrix} 8-4j & 0 & 0 \\ 0 & 4+12j & 0 \\ 0 & 0 & 6-2j \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{شاخه ۱:} \\ \text{شاخه ۲:} \\ \text{شاخه ۳:} \end{matrix}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Z_\ell = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 8-4j & 0 & 0 \\ 0 & 4+12j & 0 \\ 0 & 0 & 6-2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 8-4i & 0 \\ 0 & 4+12i \\ 6-2i & -6+2i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8-4i & 0 \\ 0 & 4+12i \\ 6-2i & -6+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14-6i & -6+2i \\ -6+2i & 10+10i \end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$10\sqrt{2}\measuredangle 45^\circ = 10\sqrt{2}(\cos(45) + j\sin(45)) = 10\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 10(1+j)$$

$$V_s = \begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

منبع شاخه ۱ با جریان شاخه۱ هم جهت نیست:
شاخه ۲ منبع ندارد:
شاخه ۳ منبع ندارد:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هیچ کدام از شاخه ها منبع جریان ندارند:

اکنون داریم:

$$e_s \triangleq -B.V_s + B.Z.J_s = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = -\begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10(1+j) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i = Z_\ell^{-1}.e_s = \begin{bmatrix} 14-6i & -6+2i \\ -6+2i & 10+10i \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 10(1+j) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(140-60j+140j+60)-(36-24j-4)}\begin{bmatrix} (10+10j)(10+10j) \\ (6-2j)(10+10j) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{168+104j}\begin{bmatrix} 100+100j+100j-100 \\ 60+60j-20j+20 \end{bmatrix} = \frac{1}{168+104j}\begin{bmatrix} 200j \\ 80-40j \end{bmatrix}$$

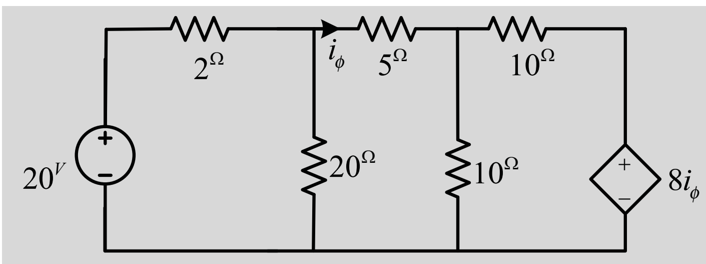
$$\rightarrow \begin{cases} i_1 = 0.5328 + 0.8607j \\ i_2 = 0.4508 - 0.0410j \end{cases}$$

بنابراین ولتاژ شاخه 4^Ω برابر است با:

$$V(4^\Omega) = 4i_2 = 1.8033 - 0.1639j$$

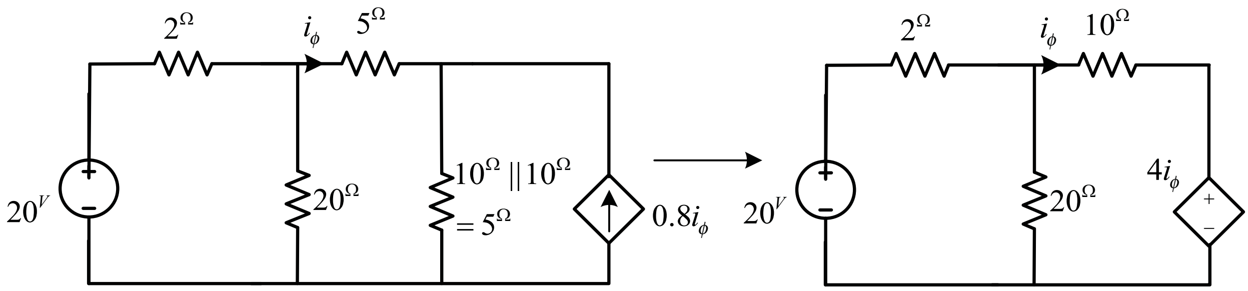
◄ مثال ۱-۱۱:

با استفاده از روش حلقه، جریان مجهول را محاسبه نمایید:

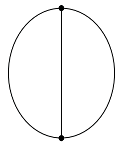


حل:

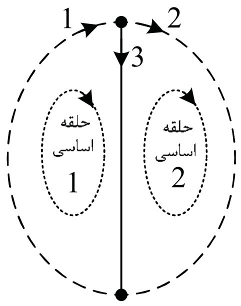
ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم، برای این کار ابتدا مدار را تا جای ممکن ساده می کنیم:



بنابراین:



این گراف ۲ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. توجه کنید که در صورت سوال جهت جریان ها مشخص نشده است. جهت جریان شاخه ها را دلخواه انتخاب نموده و سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم:



$$\begin{cases} n_t = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 1 & \text{تعداد شاخه های درخت:} \\ \ell = 2 & \text{تعداد شاخه های لینک:} \end{cases}$$

با توجه به این گراف، ماتریس های حلقه و امپدانس بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{حلقه ۱:} \\ \text{حلقه ۲:} \end{array} \end{array}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{شاخه ۱:} \\ \text{شاخه ۲:} \\ \text{شاخه ۳:} \end{array}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Z_\ell = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \\ 20 & -20 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم، با توجه به اینکه در این مدار منبع وابسته داریم، باید منبع وابسته را بصورت معادله ای از جریان حلقه های اساسی وارد کنیم. برای این کار می نویسیم:

$$i_\phi = i_2 \rightarrow 4 i_\phi = 4 i_2$$

بنابراین:

$$V_s = \begin{bmatrix} -20 \\ 4i_\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$
منبع شاخه ۱ با جریان شاخه۱ هم جهت نیست:
منبع شاخه ۲ با جریان شاخه ۲ هم جهت است:
شاخه ۳ منبع ندارد:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
هیچ کدام از شاخه ها منبع جریان ندارند:

اکنون داریم:

$$e_s \triangleq -B.V_s + B.Z.J_s = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -20 \\ 4i_2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = -\begin{bmatrix} -20 \\ 4i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -4i_2 \end{bmatrix}$$

$$i = Z_\ell^{-1}.e_s = \begin{bmatrix} 22 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 20 \\ -4i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1154 & 0.0769 \\ 0.0769 & 0.0846 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ -4i_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} i_1 = 2.3 - 0.3i_2 \\ i_2 = 1.54 - 0.34i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = 2.3 - 0.3i_2 \\ 1.34i_2 = 1.54 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = 2.3 - 0.3\times 1.12 \cong 1.96 \\ i_2 = \dfrac{1.54}{1.34} \simeq 1.12 \end{cases}$$

۱-۵- روش تجزیه و تحلیل کات‌ست:

در روش تجزیه تحلیل حلقه مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱. یک گراف متصل بهم با b شاخه و n_t گره را در نظر گرفته و درخت دلخواه T از آن را انتخاب کنید. این درخت $n = (n_t - 1)$ شاخه درخت و $\ell = b - (n_t - 1)$ لینک دارد.
۲. لینک ها را از یک تا ℓ و شاخه های درخت را از $\ell + 1$ تا b شماره گذاری می کنیم.
۳. کات‌ست های اساسی درخت را مشخص نموده و یک جهت قرار دادی (هم جهت با شاخه درخت مربوطه) برای کات‌ست ها در نظر می‌گیریم.
۴. ماتریس Q را که ماتریس کات‌ست اساسی خوانده می شود، بصورت زیر تشکیل می دهیم:

$$Q_{n\times b} = \begin{cases} 1 & \text{: اگر شاخه } k \text{ در کات ست } i \text{ و بوده و جهت قراردادی آنها یکسان باشد} \\ -1 & \text{: اگر شاخه } k \text{ در کات ست } i \text{ و بوده و جهت قراردادی آنها یکسان نباشد} \\ 0 & \text{: اگر شاخه } k \text{ در کات ست } i \text{ نباشد} \end{cases} \qquad ۱-۸$$

۵. اگر بردار $J_{b\times 1}$ را بردار جریان شاخه های گراف در نظر بگیریم. با استفاده از ماتریس Q داریم:

$$Q.J = 0 \qquad ۱-۹$$

که معادله ۱-۹ بیانگر معادلات جریان گراف مداری می باشد. از آنجا که هر کات‌ست اساسی تنها یک شاخه اساسی را شامل می‌شود، داریم:

$$Q = \left[E \quad | \quad I_{n\times n} \right] \qquad ۱-۱۰$$

که در آن I یک ماتریس یکه $n \times n$ و E یک ماتریس $n \times \ell$ بدون شرط خاصی می باشد.

۶. اکنون یک ماتریس ادمیتانس قطری به نام Y تشکیل می دهیم بطوریکه درایه روی قطر اصلی سطر kام آن کل ادمیتانس موجود در شاخه شماره k باشد.

۷. ماتریس ادمیتانس کات‌ست برای درخت T را بصورت زیر محاسبه می کنیم:

$$Y_q \triangleq Q.Y.Q^T \qquad \text{۱-۱۱}$$

۸. دو بردار با ابعاد $b\times 1$ یکی برای منابع ولتاژ شاخه ها (V_S) و دیگری برای منابع جریان شاخه های گراف (J_S) تشکیل می‌دهیم. منابع جریانی که هم جهت با شاخه هستند را مثبت و بقیه را منفی در نظر می گیریم.

۹. اکنون ولتاژ کات‌ست های اساسی مدار بصورت زیر بدست می آید:

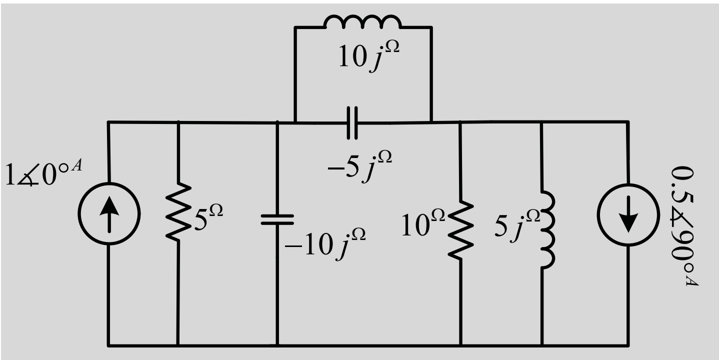
$$i_s \triangleq -Q.J_s + Q.Y.V_s \qquad \text{۱-۱۲}$$

$$e = Y_q^{-1}.i_s \qquad \text{۱-۱۳}$$

که در آن e یک بردار $n\times 1$ شامل ولتاژ کات‌ست های اساسی می باشد.

مثال ۱-۱۲:

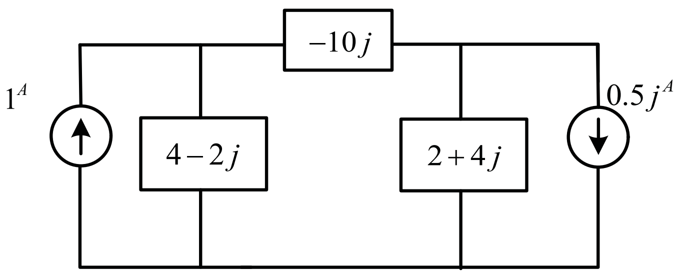
ولتاژ شاخه های مدار زیر را به روش کات‌ست محاسبه نمایید:



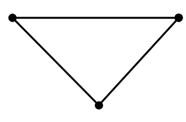
حل:

ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم، برای این کار ابتدا مدار را تا جای ممکن ساده می کنیم:

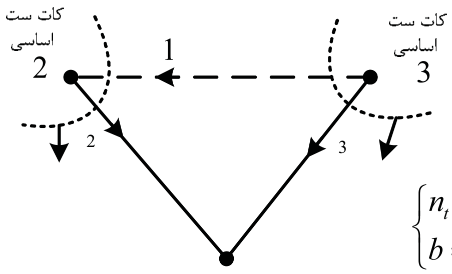
$$\begin{cases} -10j \,||\, 5 = \dfrac{-50j}{5-10j} = 4-2j \\ 10j \,||\, -5j = \dfrac{10j\times(-5j)}{10j-5j} = \dfrac{-50j^2}{5j} = -10j \\ 10 \,||\, 5j = \dfrac{50j}{10+5j} = 2+4j \\ 1\measuredangle 0^\circ = 1 \\ 0.5\measuredangle 90^\circ = 0.5j \end{cases} \rightarrow$$



بنابراین:



این گراف ۳ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم: (جهت جریان شاخه ها دلخواه انتخاب شده است.)



$$\begin{cases} n_t = 3 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ \ell = 1 \end{cases}$$ تعداد شاخه های درخت:

با توجه به این گراف، ماتریس های کات‌ست و ادمیتانس بصورت زیر خواهند بود:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱} & \text{شاخه ۲} & \text{شاخه ۳} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} :\text{کات ست ۲} \\ :\text{کات ست ۳} \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱} & \text{شاخه ۲} & \text{شاخه ۳} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{-10j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4-2j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2+4j} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0.1j & 0 & 0 \\ 0 & 0.2+0.1j & 0 \\ 0 & 0 & 0.1-0.2j \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Y_q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1j & 0 & 0 \\ 0 & 0.2+0.1j & 0 \\ 0 & 0 & 0.1-0.2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -0.1j & 0.1j \\ 0.2+0.1j & 0 \\ 0 & 0.1-0.2j \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1j & 0.1j \\ 0.2+0.1j & 0 \\ 0 & 0.1-0.2j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2+0.2j & -0.1j \\ -0.1j & 0.1-0.1j \end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ منبع ولتاژ در مدار نداریم:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0.5j \end{bmatrix} \begin{array}{l} :\text{شاخه ۱ منبع ندارد} \\ :\text{منبع شاخه ۲ با جریان شاخه۲ هم جهت نیست} \\ :\text{منبع شاخه ۳ با جریان شاخه۳ هم جهت است} \end{array}$$

اکنون داریم:

$$i_s \triangleq -Q.J_s + 0 = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0.5j \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 0.5j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5j \end{bmatrix}$$

اکنون اگر ولتاژ شاخه های درخت را با e و ولتاژ شاخه های گراف را با V نمایش دهیم داریم:

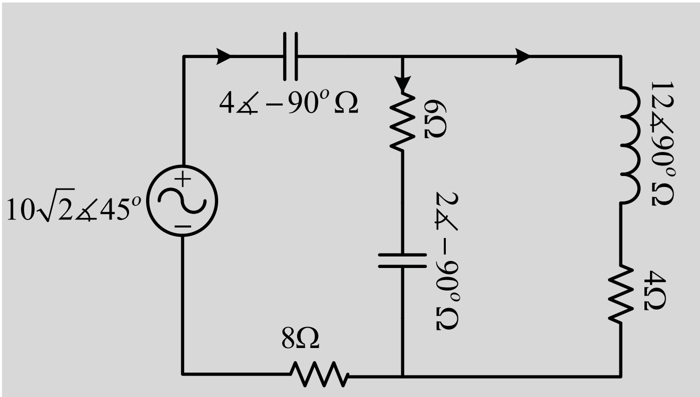
$$e = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2+0.2j & -0.1j \\ -0.1j & 0.1-0.1j \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(0.2+0.2j)(0.1-0.1j)-(0.1j)^2}\begin{bmatrix} 0.1-0.1j & 0.1j \\ 0.1j & 0.2+0.2j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2j \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} V_1 = e_3 - e_2 = (2)-(3-2j) = -1+2j \\ V_2 = e_2 = 3-2j \\ V_3 = e_3 = 2 \end{cases}$$

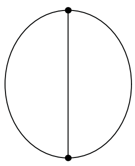
◄ مثال ۱-۱۳:

با استفاده از روش کات‌ست، ولتاژ مقاومت 4^{Ω} را محاسبه نمایید:

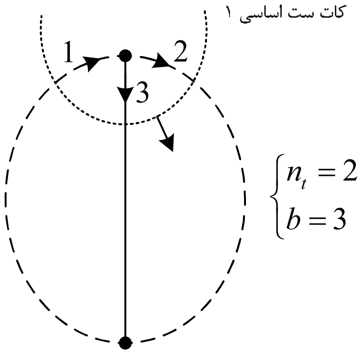


حل:

ابتدا گراف مداری را رسم می کنیم:



این گراف ۲ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم:



$$\begin{cases} n_t = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 1 & \text{تعداد شاخه های درخت:} \\ \ell = 2 & \text{تعداد شاخه های لینک:} \end{cases}$$

با توجه به این گراف، ماتریس های کات‌ست و ادمیتانس بصورت زیر خواهند بود:

کات ست ۱: $Q = \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱} & \text{شاخه ۲} & \text{شاخه ۳} \\ \hline \end{array}$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱} & \text{شاخه ۲} & \text{شاخه ۳} \end{array}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{8-4j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4+12j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6-2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1+0.05j & 0 & 0 \\ 0 & 0.025-0.075j & 0 \\ 0 & 0 & 0.15+0.05j \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Y_q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1+0.05j & 0 & 0 \\ 0 & 0.025-0.075j & 0 \\ 0 & 0 & 0.15+0.05j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -0.1-0.05j \\ 0.025-0.075 \\ 0.165 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1-0.05j \\ 0.025-0.075j \\ 0.165 \end{bmatrix} = 0.275 + 0.025j$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$V_s = \begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

منبع شاخه ۱ با جریان شاخه هم جهت نیست:

شاخه ۲ منبع ندارد:

شاخه ۳ منبع ندارد:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هیچ کدام از شاخه ها منبع جریان ندارند:

اکنون داریم:

$$i_s \triangleq 0 + Q.Y.V_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1+0.05j & 0 & 0 \\ 0 & 0.025-0.075j & 0 \\ 0 & 0 & 0.15+0.05j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10(1+j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -0.5-1.5j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = 0.5+1.5j$$

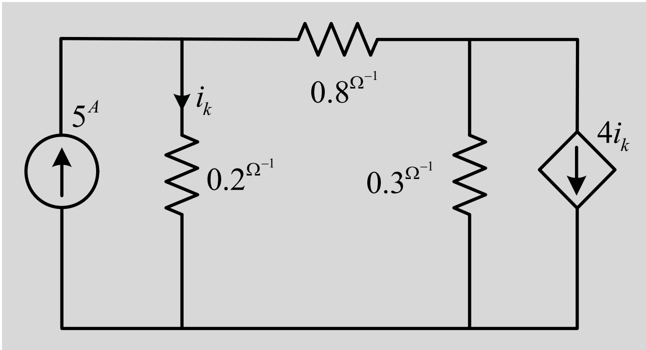
اکنون اگر ولتاژ شاخه های درخت را با e و ولتاژ شاخه های گراف را با V نمایش دهیم داریم:

$$e = \begin{bmatrix} e_3 \end{bmatrix} = Y_q^{-1} i_s = \left(\frac{1}{0.275 + 0.025j} \right) (0.5+1.5j) = 2.2951 + 5.2459j$$

$$V(4^{\Omega}) = \left(\frac{4}{4+12j} \right) e_3 = 1.8033 - 0.1639j$$

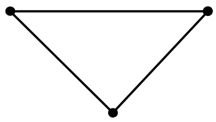
◀ مثال ۱-۱۴:

با استفاده از روش کات‌ست، مدار زیر را تحلیل نمایید:

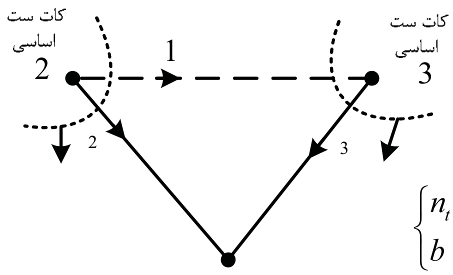


حل:

بنابراین:



این گراف ۳ گره و ۳ شاخه دارد. یک درخت از این گراف انتخاب نموده و شماره گذاری را بر اساس نکات فوق انجام می‌دهیم. سپس حلقه های اساسی آن را مشخص می کنیم: (جهت جریان شاخه ها دلخواه انتخاب شده است.)



تعداد شاخه های درخت: $\begin{cases} n_t = 3 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ \ell = 1 \end{cases}$

با توجه به این گراف، ماتریس های کات‌ست و ادمیتانس بصورت زیر خواهند بود:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{:کات ست ۲} \\ \text{:کات ست ۳} \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{شاخه ۱:} & \text{شاخه ۲:} & \text{شاخه ۳:} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین ماتریس امپدانس حلقه بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$Y_q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0.8 & -0.8 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.8 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1.1 \end{bmatrix}$$

اکنون بردارهای منابع را مشخص می کنیم:

$$V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ منبع ولتاژ در مدار نداریم:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 4i_k \end{bmatrix}$$

شاخه ۱ منبع ندارد:

منبع شاخه ۲ با شاخه ۲ هم جهت نیست:

منبع شاخه ۳ با شاخه۳ هم جهت است:

اکنون داریم:

$$i_s \triangleq -Q.J_s + 0 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 4i_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4i_k \end{bmatrix}$$

اکنون باید جریان مجهول را به ولتاژ شاخه های درخت تبدیل کنیم:

$$i_k = 0.2e_2 \rightarrow i_s = \begin{bmatrix} 5 \\ -0.8e_2 \end{bmatrix}$$

اکنون اگر ولتاژ شاخه های درخت را با e و ولتاژ شاخه های گراف را با V نمایش دهیم داریم:

$$e = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1.1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ -0.8e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & 1.74 \\ 1.74 & 2.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -0.8e_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} e_2 = 12 - 1.4e_2 \\ e_3 = 8.7 - 1.74e_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2.4e_2 = 12 \\ e_3 = 8.7 - 1.74e_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e_2 = 5^V \\ e_3 = 8.7 - 1.74 \times 5 \cong 0^V \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = e_2 - e_3 = 5^V \\ V_2 = e_2 = 5^V \\ V_3 = e_3 = 0^V \end{cases}$$

بخش دوم

معادلات حالت

بخش دوم: معادلات حالت

۲-

۲-۱- مقدمه:

برای شبکه های مداری که شامل عناصر سلف و خازن می باشند، معادلات دیفرانسیل توصیف کننده مدار مربوطه دارای شکل کلی

$$\dot{x} = f(x, w, t) \qquad ۲-۱$$

می باشد. که در این معادلات x یک بردار n مولفه ای و w ورودی مدار است. این معادلات، معادلات حالت توصیف کننده مدار نامیده می شوند. برای توصیف یک مدار به صورت فوق سه دلیل وجود دارد:

- این نوع توصیف مداری برای برنامه نویسی مناسب تر است.
- تعمیم این توصیف مداری به شبکه های غیرخطی از روش های دیگر راحت تر است.
- تعدادی از مفاهیم نظریه ای سیستم ها، در این شکل به راحتی قابل کاربرد می باشد.

تعریف:

دسته ای از متغیرهای مدار که با داشتن آنها در هر زمان t_0، به همراه ورودی مدار، برای توصیف متغیرهای مداری در $t > t_0$ کافی باشند را **متغیرهای حالت مدار** گویند.

معادلات حالت برای یک شبکه خطی بصورت زیر بیان می گردند:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \qquad ۲-۲$$

که در آن $x(t)$ بردار متغیرهای حالت، $w(t)$ ورودی مدار و $y(t)$ خروجی مورد نظر با مشخصات زیر می باشند:

$$\{A_{n\times n} \quad B_{n\times m} \quad C_{1\times n} \quad D_{1\times m} \quad x_{n\times 1} \quad w_{m\times 1} \quad y_{1\times 1} \qquad ۲-۳$$

که در آن m تعداد ورودی و n تعداد متغیر های حالت است.

نکته:

تحت شرایط کلی، حالت یک شبکه مداری، دلخواه بوسیله ولتاژ های خازن ها (یا بار خازنها) و جریان های سلف های مدار (یا شار سلف ها) مشخص می گردد:

سلف:

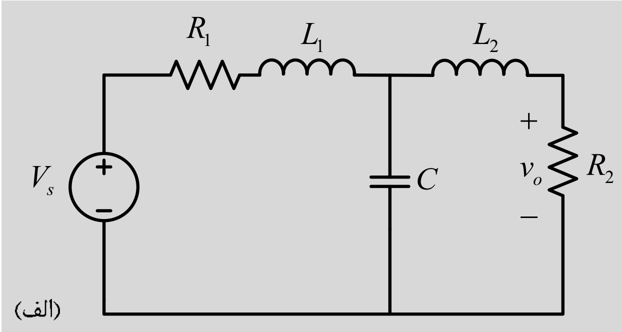
$$\begin{cases} v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ \phi_L(t) = Li_L(t) \end{cases}$$

خازن:

$$\begin{cases} i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ q_C(t) = Cv_C(t) \end{cases}$$

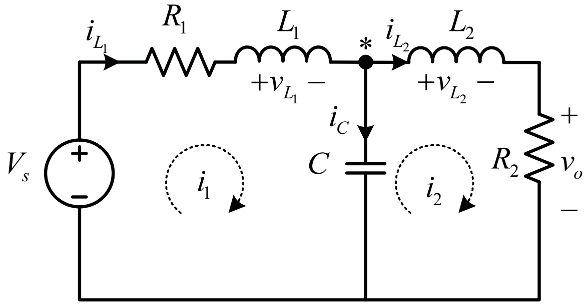
مثال ۲-۱:

معادلات حالت مدارهای زیر را بدست آورید:



حل:

این مدار دو سلف و یک خازن دارد. ابتدا متغیر های حالت مدار را مشخص می کنیم:



$$\rightarrow x=\begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}$$

اکنون برای بدست آوردن بردار $\dot{x}$، معادلات حاکم بر ولتاژ سلف ها و جریان خازن را می نویسیم:

$$\begin{cases} -V_s+R_1 i_1+v_{L_1}+v_C=0 & \text{:معادله مش ۱} \\ -v_C+v_{L_2}+R_2 i_2=0 & \text{:معادله مش ۲} \\ i_C=i_1-i_2 & \text{:معادله گره *} \end{cases}$$

اکنون بردار $\dot{x}$ را بدست می آوریم، برای این کار تمام متغیر ها را به متغیرهای حالت و یا مشتقات آنها تبدیل می کنیم:

$$\begin{cases} v_{L_1}=V_s-R_1 i_1-v_C=V_s-R_1 i_{L_1}-v_C \\ v_{L_2}=v_C-R_2 i_2=v_C-R_2 i_{L_2} \\ i_C=i_1-i_2=i_{L_1}-i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1\dfrac{di_{L_1}}{dt}=V_s-R_1 i_{L_1}-v_C \\ L_2\dfrac{di_{L_2}}{dt}=v_C-R_2 i_{L_2} \\ C\dfrac{dv_C}{dt}=i_{L_1}-i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_{L_1}}{dt}=\dfrac{1}{L_1}\left(V_s-R_1 i_{L_1}-v_C\right) \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt}=\dfrac{1}{L_2}\left(v_C-R_2 i_{L_2}\right) \\ \dfrac{dv_C}{dt}=\dfrac{1}{C}\left(i_{L_1}-i_{L_2}\right) \end{cases}$$

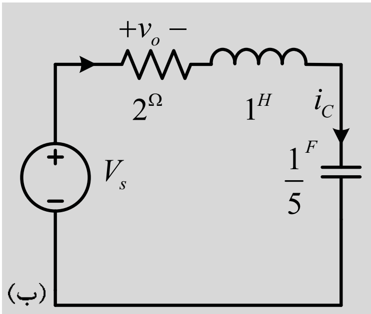
اکنون معادله خروجی را بدست می آوریم:

$$v_o=v_{R_2}=R_2 i_2=R_2 i_{L_2}$$

با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله ۲-۲ داریم:

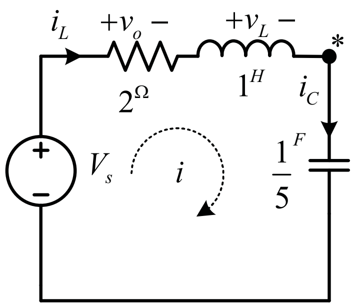
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{v}_C\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C} & \frac{-1}{C}\\ \frac{-1}{L_1} & \frac{-R_1}{L_1} & 0\\ \frac{1}{L_2} & 0 & \frac{-R_2}{L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L_1}\\ 0\end{bmatrix}\times V_s$$

$$v_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}+0\times V_s$$



حل:

این مدار یک سلف و یک خازن دارد. ابتدا متغیر های حالت مدار را مشخص می کنیم:



$$\rightarrow x=\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}$$

اکنون برای بدست آوردن بردار $\dot{x}$، معادلات حاکم بر ولتاژ سلف ها و جریان خازن را می نویسیم:

$$\begin{cases}-V_s+2i+v_L+v_C=0 & \text{: معادله مش}\\ i_C-i_L=0 & \text{معادله گره *:}\end{cases}$$

اکنون بردار $\dot{x}$ را بدست می آوریم، برای این کار تمام متغیر ها را به متغیرهای حالت و یا مشتقات آنها تبدیل می کنیم:

$$\begin{cases}v_L=V_s-2i-v_C=V_s-2i_{L_1}-v_C\\ i_C=i_L\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}1\frac{di_L}{dt}=V_s-2i_{L_1}-v_C\\ \frac{1}{5}\frac{dv_C}{dt}=i_L\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{di_L}{dt}=V_s-2i_L-v_C\\ \frac{dv_C}{dt}=5i_L\end{cases}$$

اکنون معادله خروجی را بدست می آوریم:

$$v_o=v_R=2i=2i_L$$

با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله ۲-۲ داریم:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{v}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{dv_C}{dt}\\ \dfrac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\times V_s$$

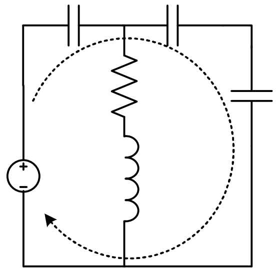
$$v_o=\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+0\times V_s$$

۲-۲- بیان معادلات حالت مدار با استفاده از تعاریف کات ست و حلقه:

با استفاده از روش های مرسوم گره و مش که در درس مدارهای الکتریکی ۱ آموختیم، بدست آوردن معادلاتی که دقیقاً به معادلات حالت منجر شود، برای مدارهای با ابعاد بزرگ مشکل خواهد بود. بنابراین با استفاده از تعاریف جدید کات ست و حلقه معادلات مدار را به معادلاتی که دقیقاً معادل معادلات حالت هستند، محدود می کنیم. برای این منظور مراحل زیر باید طی شود:

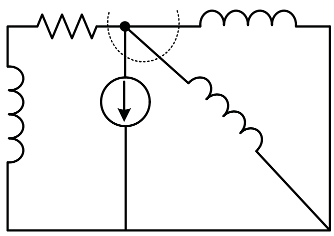
۱. ابتدا یک درخت شامل تمام خازن ها انتخاب می کنیم، بطوریکه سلف های موجود در مدار در لینک ها قرار داشته باشند. توجه کنید که هیچ شاخه درختی نباید شامل سلف و هیچ لینکی نباید شامل خازن باشد. برای عناصر دیگر مدار نظیر مقاومت و منابع محدودیتی وجود ندارد.
۲. ولتاژ های خازن ها و جریان سلف ها را بعنوان متغیرهای حالت در نظر می گیریم.
۳. برای هر خازن یک معادله کات ست اساسی و برای هر سلف یک معادله حلقه اساسی می نویسیم.
۴. در معادلات بدست آمده تمام متغیرهای اضافی را به متغیرهای حالت، مشتقات آنها و ورودی تبدیل می کنیم.

تعریف: حلقه ای که تنها از خازن و منابع ولتاژ مستقل تشکیل شده باشد را **حلقه خازنی** گویند.



شکل ۲-۱: حلقه خازنی

تعریف: کات ستی که تنها از سلف ها و منابع جریان مستقل تشکیل شده باشد را **کات ست سلفی** گویند.

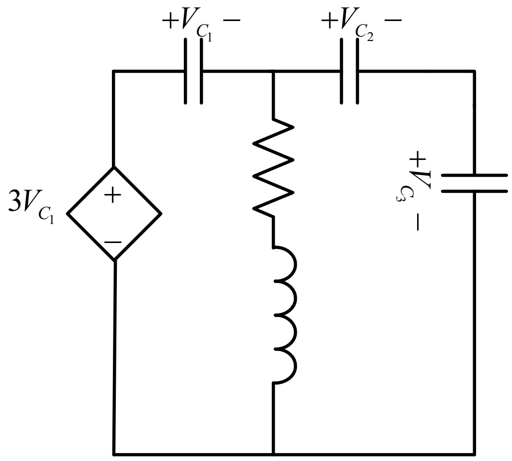


شکل ۲-۲: کات ست سلفی

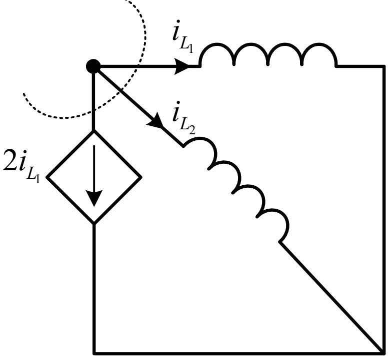
نکته بسیار مهم: برای یک مدار خطی بدون منبع وابسته، تعداد متغیرهای حالت برابر است با:

تعداد کات ست های سلفی - تعداد حلقه خازنی - تعداد کل سلف های مدار + تعداد کل خازن های مدار = تعداد متغیرهای حالت مدار

نکته: وجود منابع وابسته می تواند تعداد متغیرهای حالت مدار را کاهش دهد.



متغیرها به هم وابسته هستند: $-3V_{C_1}+V_{C_1}+V_{C_2}+V_{C_3}=0$



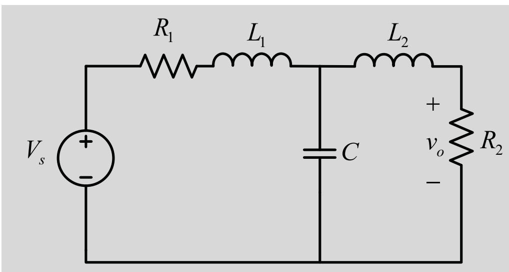
متغیرها به هم وابسته هستند: $2i_{L_1}+i_{L_1}+i_{L_2}=0$

شکل ۲-۲: وجود منابع وابسته گاهی سبب وابستگی متغیرهای حالت می گردد.

مثال قسمت الف مثال ۲-۱ را مجددا به روش کات ست و حلقه بررسی می کنیم:

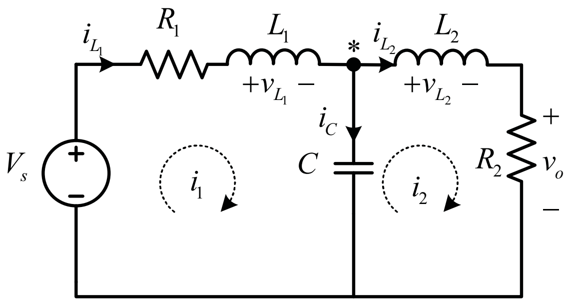
مثال ۲-۲:

معادلات حالت مدارهای زیر را با استفاده از تعاریف کات ست و حلقه بدست آورید:



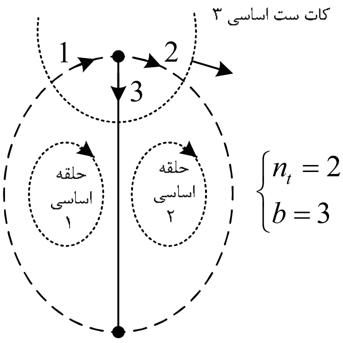
حل:

این مدار دو سلف و یک خازن دارد. ابتدا متغیر های حالت مدار را مشخص می کنیم:



$$\rightarrow x=\begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}$$

اکنون یک گراف مداری و یک درخت متناظر را به گونه ای رسم می کنیم که خازن در شاخه درخت و سلف ها در لینک ها قرار گیرند:



$$\begin{cases} n_t=2 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ \ell=2 \end{cases}$$

تعداد شاخه های درخت: $n=1$

تعداد شاخه های لینک: $\ell=2$

اکنون برای بدست آوردن بردار $\dot{x}$، معادلات کات ست های شامل خازن و حلقه های شامل سلف ها را می نویسیم:

$$\begin{cases} -V_s+R_1i_1+v_{L_1}+v_C=0 & \text{معادله حلقه ۱:} \\ -v_C+v_{L_2}+R_2i_2=0 & \text{معادله حلقه ۲:} \\ i_C=i_1-i_2 & \text{معادله کات ست ۳:} \end{cases}$$

اکنون بردار $\dot{x}$ را بدست می آوریم، برای این کار تمام متغیر ها را به متغیرهای حالت و یا مشتقات آنها تبدیل می کنیم:

معادله اکنون
$$\begin{cases} v_{L_1}=V_s-R_1i_1-v_C=V_s-R_1i_{L_1}-v_C \\ v_{L_2}=v_C-R_2i_2=v_C-R_2i_{L_2} \\ i_C=i_1-i_2=i_{L_1}-i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1\dfrac{di_{L_1}}{dt}=V_s-R_1i_{L_1}-v_C \\ L_2\dfrac{di_{L_2}}{dt}=v_C-R_2i_{L_2} \\ C\dfrac{dv_C}{dt}=i_{L_1}-i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_{L_1}}{dt}=\dfrac{1}{L_1}\left(V_s-R_1i_{L_1}-v_C\right) \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt}=\dfrac{1}{L_2}\left(v_C-R_2i_{L_2}\right) \\ \dfrac{dv_C}{dt}=\dfrac{1}{C}\left(i_{L_1}-i_{L_2}\right) \end{cases}$$

خروجی را بدست می آوریم:

$$v_o=v_{R_2}=R_2i_2=R_2i_{L_2}$$

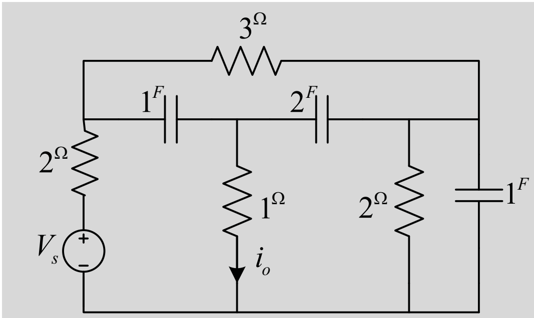
با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله ۲-۲ داریم:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} & \dfrac{-1}{C} \\ \dfrac{-1}{L_1} & \dfrac{-R_1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & 0 & \dfrac{-R_2}{L_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}\times V_s$$

$$v_o=\begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_C \end{bmatrix}+0\times V_s$$

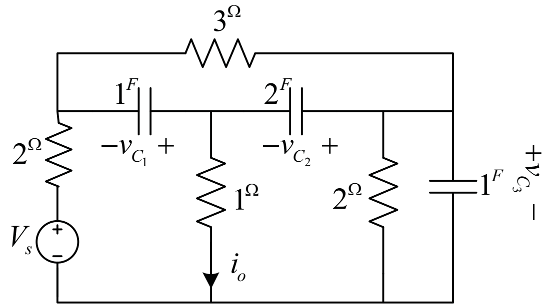
مثال ۲-۳:

معادلات حالت مدار زیر را با استفاده از تعاریف کات ست و حلقه بدست آورید:



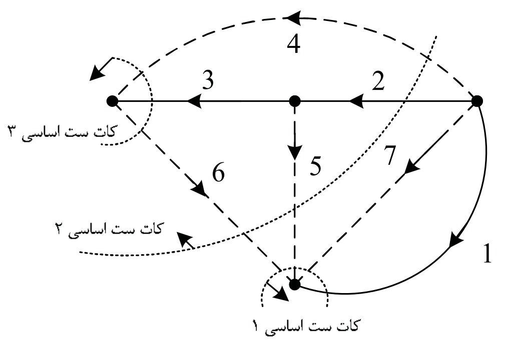
حل:

این مدار سه خازن دارد که حلقه خازنی تشکیل نمی دهند. ابتدا متغیر های حالت مدار را مشخص می کنیم:



$$\rightarrow x=\begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix}$$

اکنون یک گراف مداری و یک درخت متناظر را به گونه ای رسم می کنیم که خازن ها در شاخه های درخت قرار گیرند:

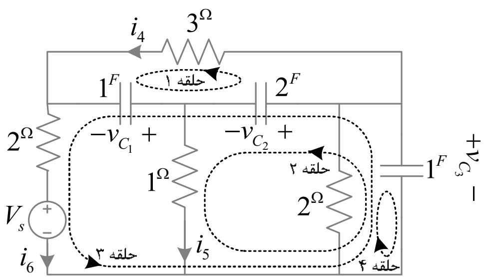


$$\begin{cases} n_t=4 \\ b=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n=3 & \text{:تعداد شاخه های درخت} \\ \ell=4 & \text{:تعداد شاخه های لینک} \end{cases}$$

اکنون برای بدست آوردن بردار $\dot{x}$، معادلات کات ست ها را می نویسیم:

$$\begin{cases} i_1+i_5+i_6+i_7=0 & \text{:معادله کات ست ۱} \\ i_2+i_4-i_5-i_6=0 & \text{:معادله کات ست ۲} \\ i_3+i_4-i_6=0 & \text{:معادله کات ست ۳} \end{cases}$$

اکنون بردار $\dot{x}$ را بدست می آوریم، برای این کار تمام متغیر ها را به متغیرهای حالت و یا مشتقات آنها تبدیل می کنیم:



حلقه ۱: $3i_4-v_{C_1}-v_{C_2}=0$

حلقه ۲: $1\times i_5-v_{C_3}+v_{C_2}=0$

حلقه ۳: $2i_6-v_{C_3}+v_{C_2}+v_{C_1}+V_S=0$

حلقه ۴: $i_7-v_{C_3}=0$

$$\begin{cases} i_4 = \dfrac{v_{C_1}+v_{C_2}}{3} \\ i_5 = \dfrac{v_{C_3}-v_{C_2}}{1} \\ i_6 = \dfrac{v_{C_3}-v_{C_2}-v_{C_1}-V_S}{2} \\ i_7 = \dfrac{v_{C_3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_{C_3} + \left(v_{C_3}-v_{C_2}\right) + \left(\dfrac{v_{C_3}-v_{C_2}-v_{C_1}-V_S}{2}\right) + \left(\dfrac{v_{C_3}}{2}\right) = 0 \\ i_{C_2} + \left(\dfrac{v_{C_1}+v_{C_2}}{3}\right) - \left(v_{C_3}-v_{C_2}\right) - \left(\dfrac{v_{C_3}-v_{C_2}-v_{C_1}-V_S}{2}\right) = 0 \\ i_{C_1} + \left(\dfrac{v_{C_1}+v_{C_2}}{3}\right) - \left(\dfrac{v_{C_3}-v_{C_2}-v_{C_1}-V_S}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{C_3} = \dfrac{1}{2}v_{C_1} + \dfrac{3}{2}v_{C_2} - 2v_{C_3} + \dfrac{1}{2}V_S \\ i_{C_2} = -\dfrac{5}{6}v_{C_1} - \dfrac{11}{6}v_{C_2} + \dfrac{3}{2}v_{C_3} - \dfrac{1}{2}V_S \\ i_{C_1} = -\dfrac{5}{6}v_{C_1} - \dfrac{5}{6}v_{C_2} + \dfrac{1}{2}v_{C_3} - \dfrac{1}{2}V_S \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1\dfrac{dv_{C_3}}{dt} = \dfrac{1}{2}v_{C_1} + \dfrac{3}{2}v_{C_2} - 2v_{C_3} + \dfrac{1}{2}V_S \\ 2\dfrac{dv_{C_2}}{dt} = -\dfrac{5}{6}v_{C_1} - \dfrac{11}{6}v_{C_2} + \dfrac{3}{2}v_{C_3} - \dfrac{1}{2}V_S \\ 1\dfrac{dv_{C_1}}{dt} = -\dfrac{5}{6}v_{C_1} - \dfrac{5}{6}v_{C_2} + \dfrac{1}{2}v_{C_3} - \dfrac{1}{2}V_S \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_{C_3}}{dt} = \dfrac{1}{2}v_{C_1} + \dfrac{3}{2}v_{C_2} - 2v_{C_3} + \dfrac{1}{2}V_S \\ \dfrac{dv_{C_2}}{dt} = -\dfrac{5}{12}v_{C_1} - \dfrac{11}{12}v_{C_2} + \dfrac{3}{4}v_{C_3} - \dfrac{1}{4}V_S \\ \dfrac{dv_{C_1}}{dt} = -\dfrac{5}{6}v_{C_1} - \dfrac{5}{6}v_{C_2} + \dfrac{1}{2}v_{C_3} - \dfrac{1}{2}V_S \end{cases}$$

اکنون معادله خروجی را بدست می آوریم:

$$i_o = \frac{v_{C_3}-v_{C_2}}{1} = v_{C_3} - v_{C_2}$$

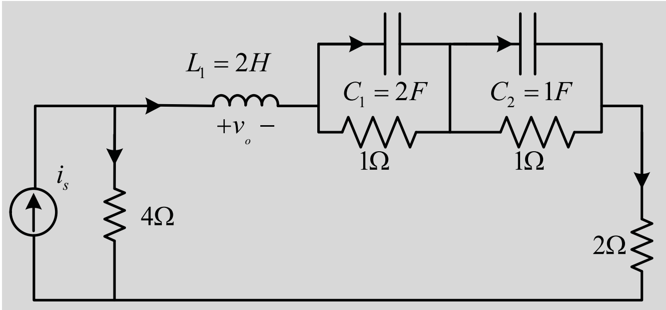
با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله ۲-۲ داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{v}_{C_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{5}{6} & -\dfrac{5}{6} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{5}{12} & -\dfrac{11}{12} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \times V_s$$

$$v_o = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix} + 0 \times V_s$$

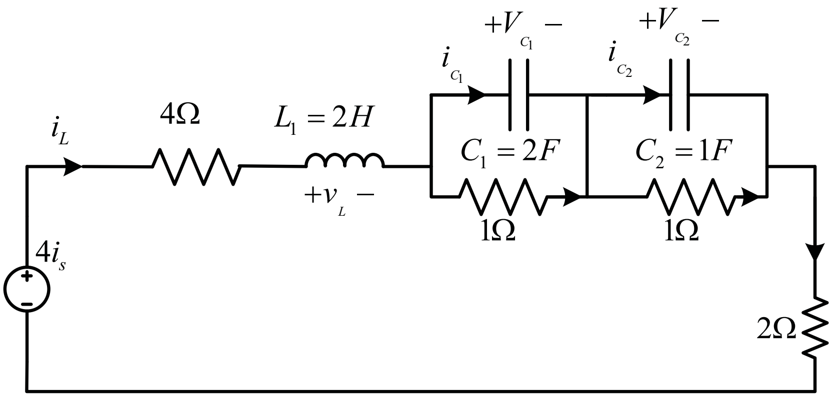
◄ مثال ۲-۴:

معادلات حالت مدار زیر را با استفاده از تعاریف کات ست و حلقه بدست آورید:



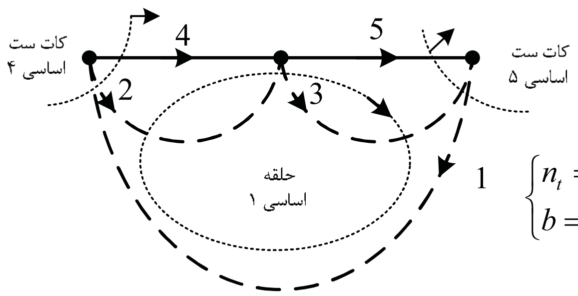
حل:

این مدار دو خازن و یک سلف دارد دارد که حلقه خازنی و کات ست سلفی تشکیل نمی دهند. ابتدا مدار را ساده نموده و متغیر های حالت مدار را مشخص می کنیم:



$$\rightarrow x = \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

اکنون یک گراف مداری و یک درخت متناظر را به گونه ای رسم می کنیم که خازن ها در شاخه های درخت و سلف در لینک قرار گیرند. تنها برای لینک سلفی یک حلقه و برای شاخه درخت هایی که خازن دارند کات ست مشخص می کنیم:



$$\begin{cases} n_t = 3 \\ b = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ \ell = 3 \end{cases}$$

تعداد شاخه های درخت: $n = 2$
تعداد شاخه های لینک: $\ell = 3$

اکنون برای بدست آوردن بردار $\dot{x}$، معادلات کات ست ها و حلقه را می نویسیم:

معادله کات ست ۴: $-i_1 + i_2 + i_4 = 0$

معادله کات ست ۵: $-i_1 + i_3 + i_5 = 0$

معادله حلقه ۱: $v_4 + v_5 + v_1 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} -i_L + i_2 + i_{C_1} = 0 \\ -i_L + i_3 + i_{C_2} = 0 \\ v_1 + v_{C_1} + v_{C_2} = 0 \end{cases}$$

اکنون بردار $\dot{x}$ را بدست می آوریم، برای این کار تمام متغیر ها را به متغیرهای حالت و یا مشتقات آنها تبدیل می کنیم:

$$\begin{cases} i_2 = \dfrac{v_{C_1}}{1} = v_{C_1} \\ i_3 = \dfrac{v_{C_2}}{1} = v_{C_2} \\ \\ v_1 = 6i_L - 4i_s + v_L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -i_L + v_{C_1} + i_{c_1} = 0 \\ -i_L + v_{C_2} + i_{c_2} = 0 \\ 6i_L - 4i_s + v_L + v_{C_1} + v_{C_2} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} i_{c_1} = 2\dfrac{dv_{C_1}}{dt} = -v_{C_1} + i_L \\ i_{c_2} = 1\dfrac{dv_{C_2}}{dt} = -v_{C_2} + i_L \\ v_L = 2\dfrac{di_L}{dt} = -v_{C_1} - v_{C_2} - 6i_L + 4i_s \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_{C_1}}{dt} = -\dfrac{1}{2}v_{C_1} + \dfrac{1}{2}i_L \\ \dfrac{dv_{C_2}}{dt} = -v_{C_2} + i_L \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{2}v_{C_1} - \dfrac{1}{2}v_{C_2} - 3i_L + 2i_s \end{cases}$$

اکنون معادله خروجی را بدست می آوریم:

$$v_o = v_L = -v_{C_1} - v_{C_2} - 6i_L + 4i_s$$

با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله ۲-۲ داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times i_s$$

$$v_o = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + 4i_s$$

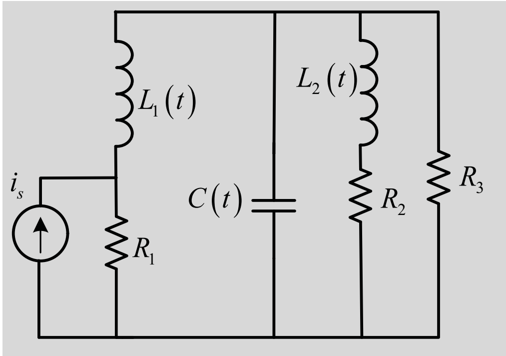
اگر ظرفیت خازن ها و ضریب القای سلف ها متغیر با زمان باشد آنگاه معادلات جریان و ولتاژ سلف و خازن بصورت زیر تغییر می‌کند:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d\left(C(t)v_C(t)\right)}{dt} = C(t)\frac{d\left(v_C(t)\right)}{dt} + \frac{d\left(C(t)\right)}{dt}v_C(t) \qquad \text{۴-۲}$$

$$V_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\left(L(t)i_L(t)\right)}{dt} = L(t)\frac{d\left(L(t)i_L(t)\right)}{dt} + \frac{d\left(L(t)\right)}{dt}i_L(t) \qquad \text{۵-۲}$$

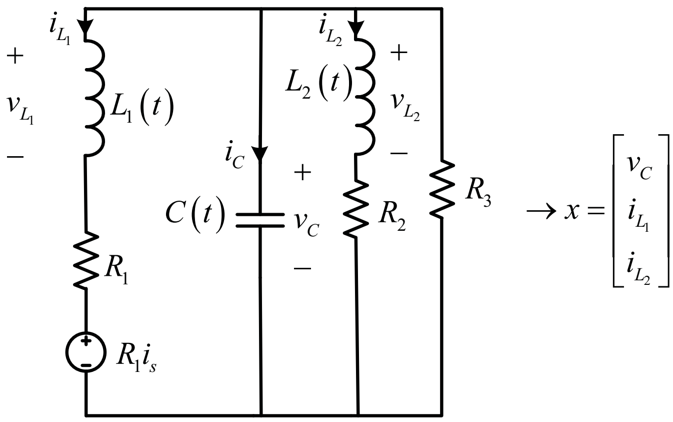
◀ مثال ۲-۴:

معادلات حالت مدار زیر را با استفاده از تعاریف کات ست و حلقه بدست آورید. خروجی را ولتاژ مقاوت R_2 در نظر بگیرید:

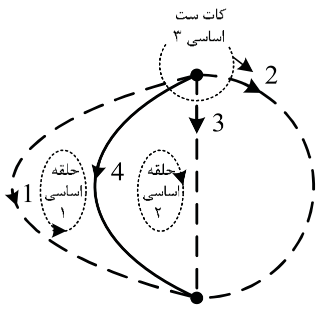


حل:

این مدار یک خازن و دو سلف دارد دارد که حلقه خازنی و کات ست سلفی تشکیل نمی دهند. ابتدا متغیر های حالت مدار را مشخص می کنیم:



اکنون یک گراف مداری و یک درخت متناظر را به گونه ای رسم می کنیم که خازن ها در شاخه های درخت و سلف در لینک قرار گیرند. تنها برای لینک سلفی یک حلقه و برای شاخه درخت هایی که خازن دارند کات ست مشخص می کنیم:



اکنون برای بدست آوردن بردار $\dot{x}$، معادلات کات ست ها را می نویسیم:

$$\begin{cases} v_{L_1} + R_1 i_{L_1} + R_1 i_s - v_C = 0 & \text{:معادله حلقه ۱} \\ v_{L_2} + R_2 i_{L_2} - v_C = 0 & \text{:معادله حلقه ۲} \\ i_{L_1} + i_{L_2} + i_C + \dfrac{v_C}{R_3} = 0 & \text{:معادله کات ست ۳} \end{cases}$$

اکنون بردار $\dot{x}$ را بدست می آوریم، برای این کار تمام متغیر ها را به متغیرهای حالت و یا مشتقات آنها تبدیل می کنیم:

$$\begin{cases} v_{L_1} = v_C - R_1 i_{L_1} - R_1 i_s \\ v_{L_2} = v_C - R_2 i_{L_2} \\ i_C = -\dfrac{v_C}{R_3} - i_{L_1} - i_{L_2} \end{cases}$$

اکنون معادله خروجی را بدست می آوریم:

$$V_{R_2} = R_2 i_{L_2}$$

با مرتب کردن معادلات فوق بر اساس معادله ۲-۲ داریم:

$$\begin{cases} v_{L_1} = i_{L_1}\dfrac{dL_1}{dt} + L_1\dfrac{di_{L_1}}{dt} = v_C - R_1 i_{L_1} - R_1 i_s \\ v_{L_2} = i_{L_2}\dfrac{dL_2}{dt} + L_2\dfrac{di_{L_2}}{dt} = v_C - R_2 i_{L_2} \\ i_C = v_C\dfrac{dC}{dt} + C\dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{v_C}{R_3} - i_{L_1} - i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1\dfrac{di_{L_1}}{dt} = v_C - \left(\dfrac{dL_1}{dt} + R_1\right) i_{L_1} - R_1 i_s \\ L_2\dfrac{di_{L_2}}{dt} = v_C - \left(\dfrac{dL_2}{dt} + R_2\right) i_{L_2} \\ C\dfrac{dv_C}{dt} = -\left(\dfrac{dC}{dt} + \dfrac{1}{R_3}\right) v_C - i_{L_1} - i_{L_2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C}\left(-\dfrac{dC}{dt} - \dfrac{1}{R_3}\right) & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{1}{L_1}\left(\dfrac{dL_1}{dt} + R_1\right) & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & 0 & -\dfrac{1}{L_2}\left(\dfrac{dL_2}{dt} + R_2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{R_1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} \times i_s$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + 0 \times i_s$$

بخش سوم

تبدیل لاپلاس

و کاربرد آن در حل مدارهای الکتریکی

بخش سوم: تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در حل مدارهای الکتریکی

۱-

۳-۱- مقدمه:

تبدیل لاپلاس بعنوان یک ابزار قدرتمند ریاضی یک روش بسیار مفید در تحلیل مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان است. پیش از آنکه به بررسی مدارهای الکتریکی با استفاده از تبدیل لاپلاس بپردازیم، چند یادآوری خواهیم داشت:

۳-۱-۱- تبدیل لاپلاس:

برای یک تابع زمانی که فقط برای $t \geq 0$ تعریف شده است تبدیل لاپلاس بصورت زیر تعریف می گردد:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad ۳-۱$$

عکس تبدیل لاپلاس نیز بصورت زیر تعریف می گردد:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_0^{+\infty} F(s)e^{st}ds \qquad ۳-۲$$

بر اساس معادلات ۳-۱ و ۳-۲ جدول زوج تبدیلات لاپلاس بصورت زیر بوجود آمده است:

جدول ۳-۱ جدول زوج تبدیلات لاپلاس

ردیف	$f(t)$	$F(s)$
۱	$\delta(t)$	1
۲	$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
۳	$t.u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
۴	$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۵	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
۶	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
۷	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
۸	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
۹	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
۱۰	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

برای توابعی که در جدول فوق وجود ندارند با استفاده از خواص اساسی تبدیل لاپلاس، عمل می کنیم.
ترکیب جدول زوج تبدیلات و جدول خواص تبدیل لاپلاس بهترین روش برای محاسبه چنین توابعی است. در زیر جدول خواص لاپلاس بصورت خلاصه شده آمده است:

جدول ۳-۲ جدول خواص تبدیل لاپلاس

ردیف	خاصیت	$x[n]$	$X(z)$
۱	جمع آثار (خطی بودن)	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$
۲	انتقال	$f(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$
۳	انتقال حوزه s	$e^{s_0 t} fx(t)$	$F(s-s_0)$
۴	-	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{s}{a}\right)$
۵	مزدوج مختلط	$\bar{f}(t)$	$\bar{F}(\bar{s})$
۶	مشتق گیری	$\frac{d^k}{dt^k}f(t)$	$s^k F(s)-s^{k-1}f(0)-s^{k-2}\frac{df(0)}{dt}-\ldots-\frac{df^{k-1}(0)}{dt^{k-1}}$
۷	انتگرال گیری	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
۷	کانولوشن	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s).F_2(s)$

قضیه مقدار اولیه:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad ۳-۳$$

قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{s\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \qquad ۴-۳$$

با توجه به جدول ۳-۱ می بینیم که تبدیل لاپلاس تمام توابع بیان شده فرم کسری دارند. برای استفاده از جدول به منظور محاسبه عکس تبدیل لاپلاس لازم است تا توابع کسری را به فرم تجزیه شده تبدیل نماییم.

۳-۱-۲- تجزیه به کسرهای جزئی:

برای تابع $F(x)$ ضرایب مربوط به کسرهایی که شامل ریشه های ساده مخرج می باشند، بصورت:

$$A_i=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)F(x) \qquad ۵-۳$$

محاسبه می گردند.

همچنین هر ریشه مکرر از مرتبه k به k کسر مجزا تجزیه می گردد. ضرایب مربوط به کسر j ام که دارای مخرج $(x-x_0)^j$ می‌باشد بدین صورت محاسبه می شود:

$$A_j=\frac{1}{(k-j)!}\lim_{x\to x_0}\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\left((x-x_0)^k F(x)\right) \qquad ۶-۳$$

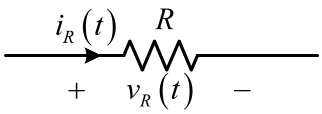
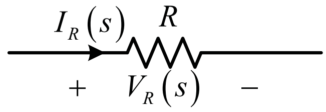
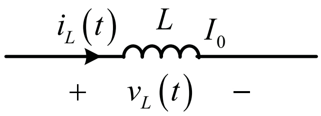
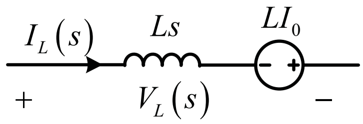
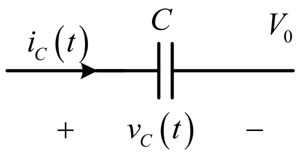
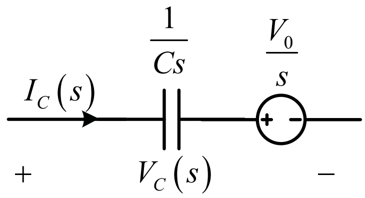
۳-۲- تحلیل مدارهای الکتریکی به روش تبدیل لاپلاس:

برای تحلیل مدار به روش لاپلاس مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱. برای مدارهای شامل کلید زنی، ابتدا شرایط اولیه مدار را محاسبه می کنیم. اگر مدار شامل سلف و خازن باشد، شرایط اولیه مدار برای تحلیل آن لازم است. برای محاسبه شرایط اولیه، قبل از کلید زنی سلف ها را اتصال کوتاه و خازن ها را مدار باز می کنیم.

۲. پس از کلیدزنی، مدار را از حوزه زمان به حوزه لاپلاس منتقل می کنیم. جدول زیر حوزه لاپلاس المان های مداری را نشان می‌دهد:

جدول ۳-۳: معادل حوزه لاپلاس المان های اصلی مدار

المان مداری	روابط و نماد حوزه زمان	روابط و نماد حوزه لاپلاس
مقاومت الکتریکی	 $v_R(t)=Ri_R(t)$	 $V_R(s)=RI_R(s)$
سلف	 $v_L(t)=L\frac{di_L}{dt}$	 $V_L(s)=(Ls)I_L(s)-LI_0$
خازن	 $i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}$	 $V_C(s)=\frac{1}{Cs}I_C(s)+\frac{V_0}{s}$

۳. معادلات مدار را در حوزه لاپلاس می نویسیم.

۴. پس از محاسبه پاسخ مورد نظر، با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس، معادل حوزه زمانی متغیر مورد نظر را بدست می آوریم.

به نکته زیر توجه کنید:

نکته بسیار مهم:

- در مسائل شامل کلید زنی با حضور منابع DC، اغلب عبارت "*کلید برای مدت زمانی طولانی در وضعیت x قرار داشته و سپس به وضعیت y می‌رود*" دیده می شود. این عبارت بدین معناست که پاسخ سلف و خازن، پاسخ حالت ماندگار است و خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه شده است.

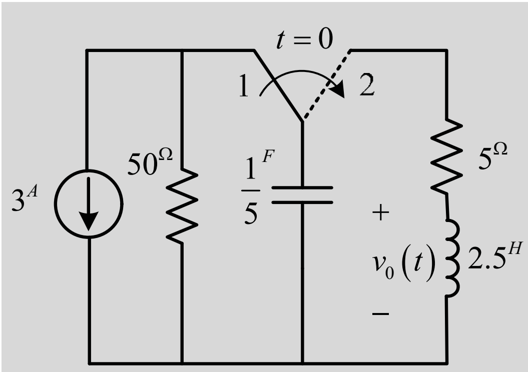
- برای خازن و سلف به ترتیب قانون پیوستگی ولتاژ و جریان برقرار است. یعنی:

$$\begin{cases} i_L\left(t_{0^+}\right)=i_L\left(t_{0^-}\right) \\ v_C\left(t_{0^+}\right)=v_C\left(t_{0^-}\right) \end{cases}$$

با چند مثال این روش به خوبی توضیح داده خواهد شد.

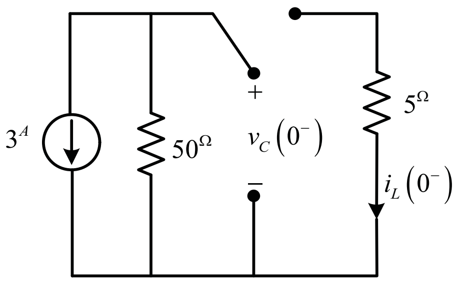
مثال ۳-۱:

کلید مدار شکل زیر، برای مدت طولانی در موقعیت ۱ بوده است. در $t=0$ کلید بطور ناگهانی به موقعیت ۲ می رود. $v_0(t)$ را برای $t\ge 0$ محاسبه نمایید.



حل:

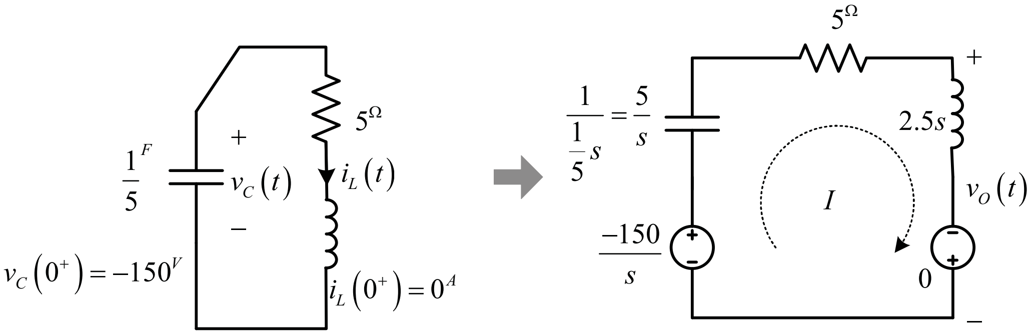
ابتدا مدار را قبل از کلید زنی تحلیل نموده و شرایط اولیه را محاسبه می کنیم. منظور از شرایط اولیه ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف است. بدین منظور مدار را مجدد قبل از کلید زنی رسم نموده و خازن را مدار باز و سلف را اتصال کوتاه می کنیم:



با توجه به این مدار می بینیم که شاخه سلفی در هیچ حلقه ای قرار ندارد بنابراین جریان اولیه سلف صفر است. همچنین ولتاژ اولیه خازن با ولتاژ مقاومت 50^{Ω} برابر است. بر طبق قانون پیوستگی ولتاژ خازن و جریان سلف داریم:

$$\begin{cases} i_L\left(0^+\right)=i_L\left(0^-\right)=0 \\ v_C\left(0^+\right)=v_C\left(0^-\right)=-3\times 50=-150^V \end{cases}$$

اکنون مدار را پس از کلید زنی به حوزه لاپلاس می بریم:



با نوشتن معادله KVL مربوطه به حلقه مدار داریم:

$$-\frac{-150}{s}+\frac{5}{s}I(s)+5I(s)+2.5sI(s)-0=0\rightarrow\frac{150}{s}+\frac{5}{s}I(s)+2.5sI(s)+5I(s)=0$$

$$\rightarrow I(s)\left(\frac{5}{s}+2.5s+5\right)=\frac{-150}{s}$$

$$\rightarrow I(s)=\frac{\frac{-150}{s}}{\frac{5}{s}+2.5s+5}=\frac{-150}{5+2.5s^2+5s}=\frac{-60}{s^2+2s+2}$$

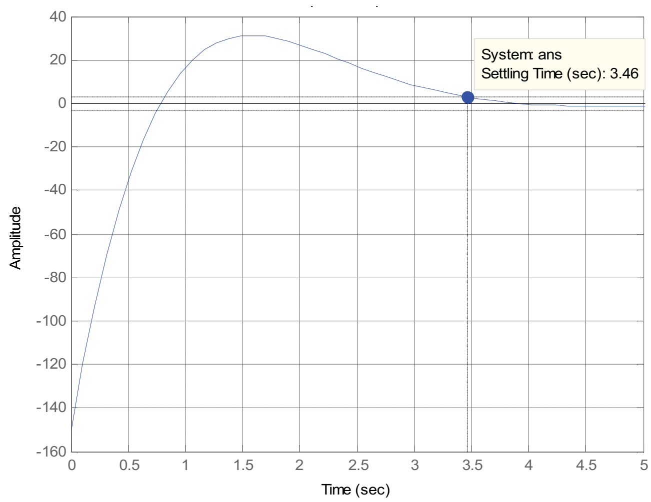
$$\rightarrow V_o(s)=2.5sI=\frac{-150s}{s^2+2s+2}$$

$$\Delta=4-8=-4<0$$

$$\rightarrow V_o(s)=\frac{-150s}{s^2+2s+2}=\frac{-150(s+1-1)}{(s+1)^2+1}=\frac{-150(s+1)}{(s+1)^2+1}+\frac{150}{(s+1)^2+1}$$

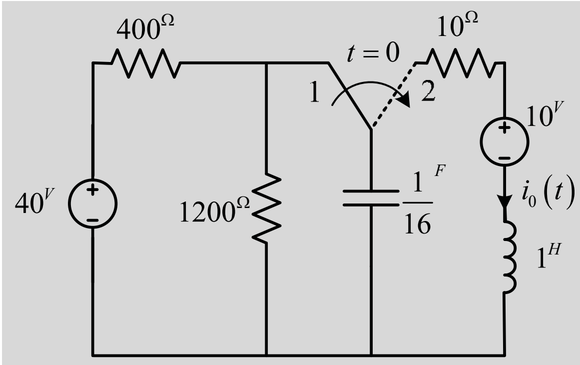
$$\rightarrow v_o(t)=L^{-1}\left\{\frac{-150(s+1)}{(s+1)^2+1}+\frac{150}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$\xrightarrow[a=1,\omega_0=1]{T3.1}v_o(t)=-150e^{-t}\cos(t)u(t)+150e^{-t}\sin(t)u(t)=-150e^{-t}\left(\cos(t)-\sin(t)\right)u(t)$$



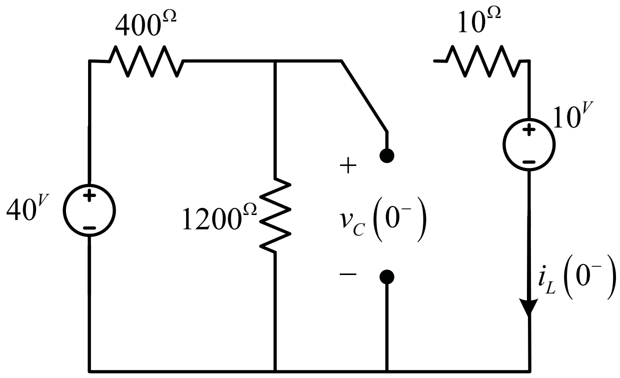
مثال ۳-۲:

کلید مدار شکل زیر، برای مدت طولانی در موقعیت ۱ بوده است. در $t=0$ کلید بطور ناگهانی به موقعیت ۲ می رود. $i_0(t)$ را برای $t\geq 0$ محاسبه نمایید.



حل:

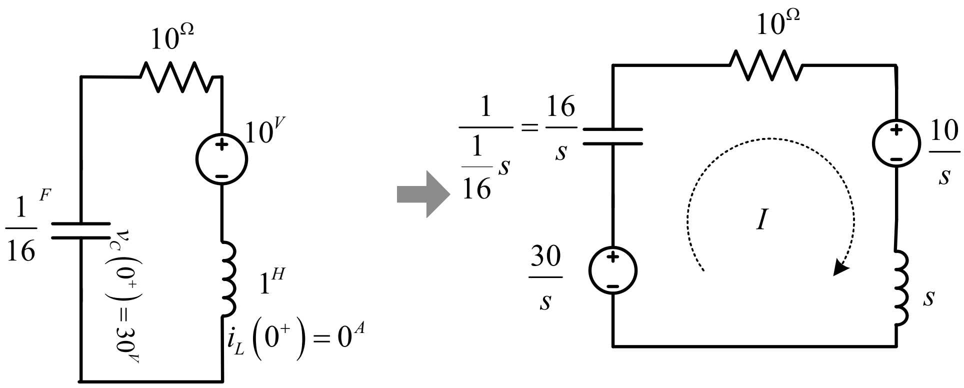
ابتدا مدار را قبل از کلید زنی تحلیل نموده و شرایط اولیه را محاسبه می کنیم. منظور از شرایط اولیه ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف است. بدین منظور مدار را مجدد قبل از کلید زنی رسم نموده و خازن را مدار باز و سلف را اتصال کوتاه می کنیم:



با توجه به این مدار می بینیم که شاخه سلفی در هیچ حلقه ای قرار ندارد بنابراین جریان اولیه سلف صفر است. همچنین ولتاژ اولیه خازن با ولتاژ مقاومت 1200^{Ω} برابر است. بر طبق قانون پیوستگی ولتاژ خازن و جریان سلف داریم:

$$\begin{cases} i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \\ v_C(0^+) = v_C(0^-) = \dfrac{1200}{1200+400} \times 40 = 30^V \end{cases}$$

اکنون مدار را پس از کلید زنی به حوزه لاپلاس می بریم:



با نوشتن معادله KVL مربوطه به حلقه مدار داریم:

$$-\frac{30}{s}+\frac{16}{s}I(s)+10I(s)+\frac{10}{s}+sI(s)=0 \rightarrow I(s)\left(\frac{16}{s}+s+10\right)=\frac{20}{s}$$

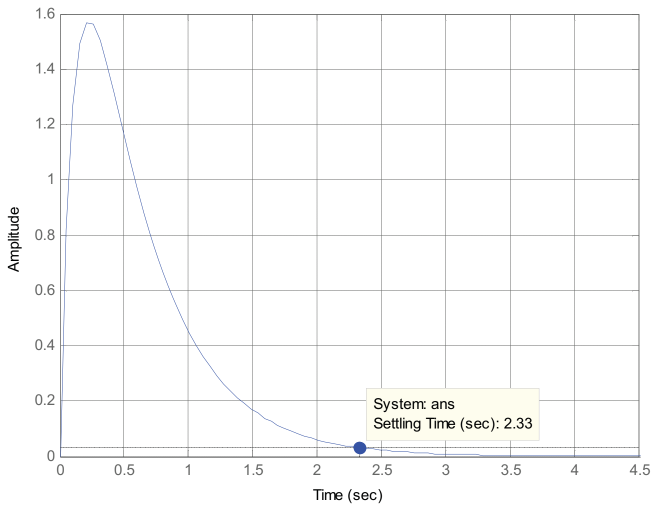
$$\rightarrow I(s)=\frac{\frac{20}{s}}{\frac{16}{s}+s+10}=\frac{20}{s^2+10s+16}$$

$$\rightarrow I_o(s)=I(s)=\frac{20}{s^2+10s+16}=\frac{20}{(s+2)(s+8)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+8}$$

$$A=\lim_{s\to -2}(s+2)I(s)=\lim_{s\to -2}\frac{20}{(s+8)}=\frac{10}{3}$$

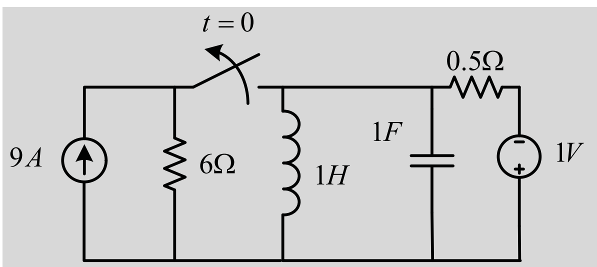
$$B=\lim_{s\to -8}(s+8)I(s)=\lim_{s\to -8}\frac{20}{(s+2)}=-\frac{10}{3}$$

$$i_o(t)=L^{-1}\left\{\frac{10}{3}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+8}\right)\right\}=\frac{10}{3}\left(e^{-2t}-e^{-8t}\right)u(t)$$



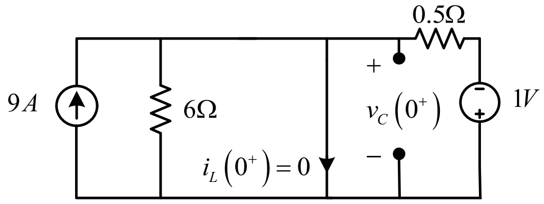
مثال ۳-۳:

کلید مدار شکل زیر، برای مدت طولانی در موقعیت بسته بوده است. در $t=0$ کلید بطور ناگهانی باز می شود. $v_L(1)$ را محاسبه نمایید.



حل:

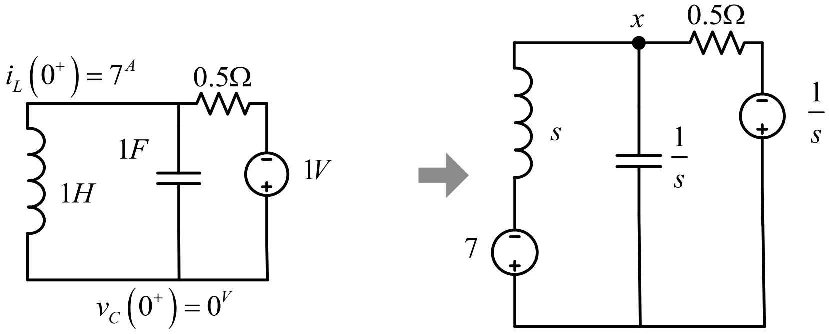
ابتدا مدار را قبل از کلید زنی تحلیل نموده و شرایط اولیه را محاسبه می کنیم. منظور از شرایط اولیه ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف است. بدین منظور مدار را مجدد قبل از کلید زنی رسم نموده و خازن را مدار باز و سلف را اتصال کوتاه می کنیم:



با توجه به این مدار می بینیم که شاخه خازن موازی یک شاخه اتصال کوتاه است بنابراین ولتاژ اولیه خازن صفر است. همچنین جریان اولیه سلف با جریان مقاومت 0.5^{Ω} برابر است. بر طبق قانون پیوستگی ولتاژ خازن و جریان سلف داریم:

$$\begin{cases} i_L(0^+) = i_L(0^-) = -\dfrac{1}{0.5} + 9 = 7^A \\ v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \end{cases}$$

اکنون مدار را پس از کلید زنی به حوزه لاپلاس می بریم:



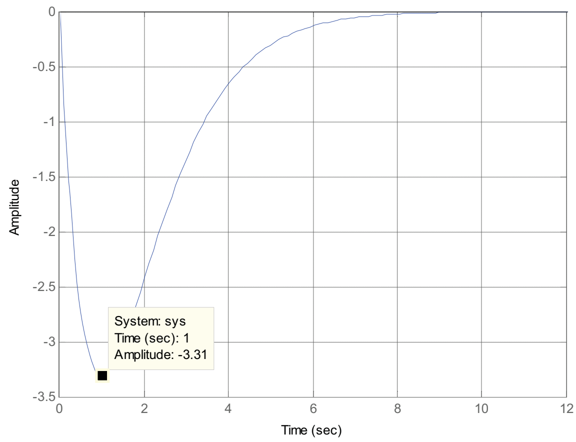
با نوشتن معادله KCL مربوطه به گره x در مدار داریم:

$$\frac{V_x(s)-(-7)}{s} + \frac{V_x(s)}{\frac{1}{s}} + \frac{V_x(s)-\left(-\frac{1}{s}\right)}{0.5} = 0 \rightarrow V_x(s)\left(\frac{1}{s}+s+2\right) = \left(-\frac{7}{s}-\frac{2}{s}\right)$$

$$\rightarrow V_x(s) = V_L(s) = \frac{\frac{-9}{s}}{\frac{1}{s}+s+2} = \frac{-9}{s^2+2s+1} = \frac{-9}{(s+1)^2}$$

$$v_L(t) = -9te^{-t}u(t)$$

$$\rightarrow v_L(1) = -9e^{-1} = -3.34$$



۳-۳- تابع تبدیل مدار و تحلیل از طریق تابع تبدیل:

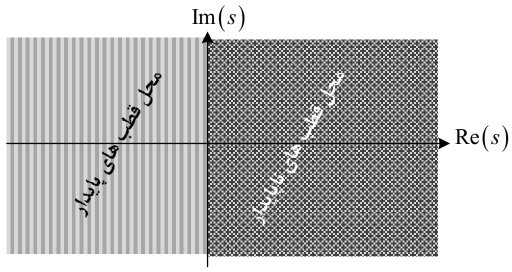
تابع تبدیل که در واقع تبدیل لاپلاس پاسخ مدار به ورودی ضربه است، بعنوان نسبت حوزه فرکانسی تبدیل لاپلاس خروجی (پاسخ مدار) به تبدیل لاپلاس ورودی (منابع ورودی) تعریف می گردد. در محاسبه تابع تبدیل شرایط اولیه را صفر در نظر می گیریم:

شکل ۳-۱: بلوک دیاگرام یک سیستم الکتریکی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \qquad ۷-۳$$

$$Y(s)=H(s).X(s) \qquad ۸-۳$$

برای مدارهای خطی فشرده، تابع تبدیل همواره کسری متعارف از s خواهد بود. همچنین قطب و صفرهای[۱] تابع تبدیل بصورت مزدوج مختلط خواهند بود. اگر بخواهیم پاسخ مدار به منابع محدود پایدار بوده و با گذشت زمان بصورت نامحدود افزایش نیابد، تابع تبدیل مدار مربوطه باید قطب هایی در نیم صفحه چپ صفحه مختلط داشته باشد.



شکل ۳-۲: صفحه مختلط و ناحیه پایدار و ناپایداری قطب ها

با دو مثال این بحث را ادامه می دهیم:

◄ مثال ۳-۴:

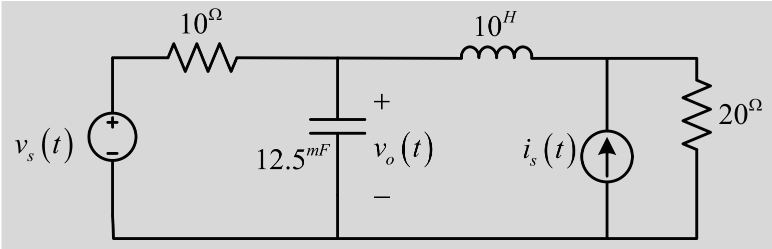
انرژی اولیه ذخیره شده در مدار زیر در لحظه ای که منابع به مدار متصل می گردند، صفر است.

الف) تابع تبدیل مدار را بدست آورید.

ب) اگر $v_s(t)=2u(t), i_s(t)=0.025u(t)$ باشند، خروجی را محاسبه نمایید.

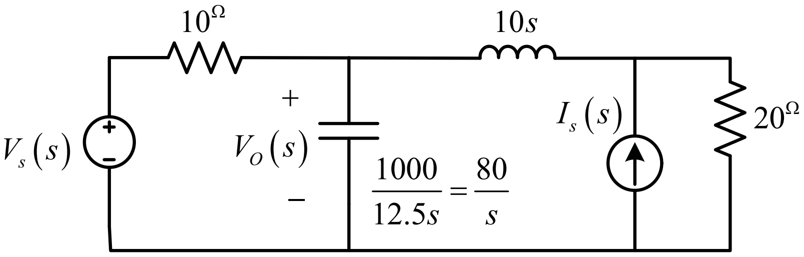
---

[۱] ریشه های مخرج تابع تبدیل را قطب و ریشه های صورت تابع تبدیل را صفرهای آن می نامند.

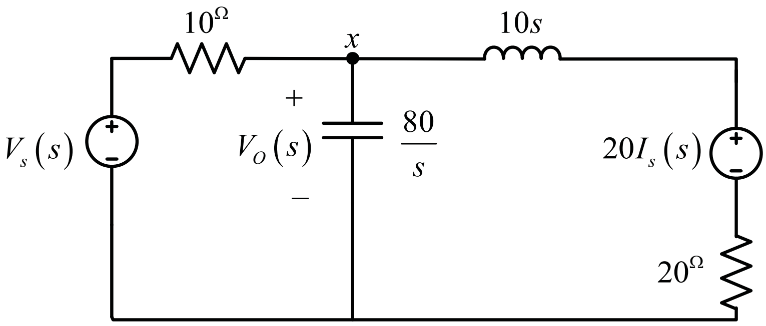


حل:

برای محاسبه تابع تبدیل، ابتدا مدار را به حوزه لاپلاس منتقل می کنیم:



با ساده سازی مدار داریم:



با نوشتن معادله گره در گره x داریم:

$$\frac{V_x(s)-V_s(s)}{10}+\frac{V_x(s)}{\frac{80}{s}}+\frac{V_x(s)-20I_s(s)}{20+10s}=0\rightarrow V_x(s)\left(\frac{1}{10}+\frac{s}{80}+\frac{1}{20+10s}\right)=\frac{1}{10}V_s(s)+\left(\frac{20}{20+10s}\right)I_s(s)$$

$$\xrightarrow[\times 10]{}V_x(s)\left(1+\frac{s}{8}+\frac{1}{2+s}\right)=V_s(s)+\left(\frac{20}{2+s}\right)I_s(s)\rightarrow V_x(s)=\frac{1}{1+\frac{s}{8}+\frac{1}{2+s}}V_s(s)+\frac{\frac{20}{2+s}}{1+\frac{s}{8}+\frac{1}{2+s}}I_s(s)$$

$$\rightarrow V_x(s)=V_O(s)=\frac{1}{\left(\frac{8(2+s)+s(2+s)+8}{8(2+s)}\right)}V_s(s)+\frac{\frac{20}{\cancel{2+s}}}{\left(\frac{8(2+s)+s(2+s)+8}{8(\cancel{2+s})}\right)}I_s(s)$$

$$\rightarrow V_O(s)=\underbrace{\frac{8(2+s)}{s^2+10s+24}}_{H_1(s)}V_s(s)+\underbrace{\frac{160}{s^2+10s+24}}_{H_2(s)}I_s(s)$$

اکنون با داشتن توابع تبدیل می توان پاسخ به هر ورودی را محاسبه نمود:

$$v_s(t)=2u(t)\to V_s(s)=\frac{2}{s}$$

$$i_s(t)=0.025u(t)\to I_s(s)=\frac{0.025}{s}$$

$$\to V_O(s)=\frac{8(2+s)}{s^2+10s+24}V_s(s)+\frac{160}{s^2+10s+24}I_s(s)=\frac{8(2+s)}{s^2+10s+24}\times\frac{2}{s}+\frac{160}{s^2+10s+24}\times\frac{0.025}{s}$$

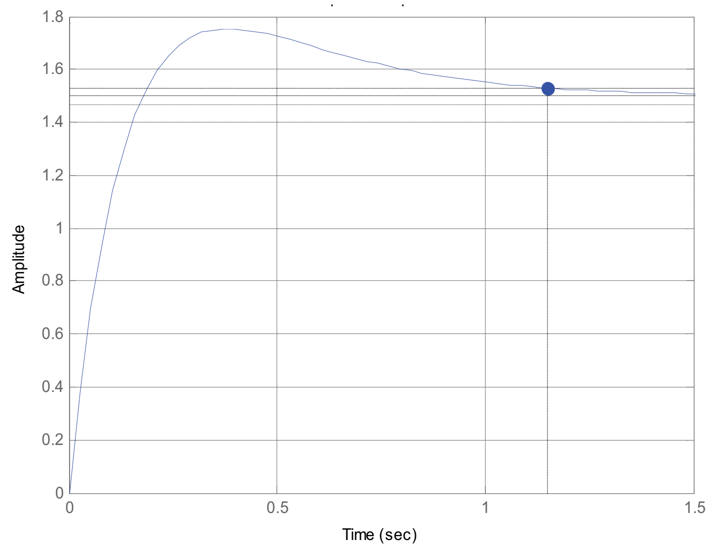
$$=\frac{16s+36}{s\left(s^2+10s+24\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+4}+\frac{C}{s+6}$$

$$A=\lim_{s\to 0}sV_O(s)=\lim_{s\to 0}\frac{16s+36}{\left(s^2+10s+24\right)}=1.5$$

$$B=\lim_{s\to -4}(s+4)V_O(s)=\lim_{s\to -4}\frac{16s+36}{s(s+6)}=3.5$$

$$C=\lim_{s\to -6}(s+6)V_O(s)=\lim_{s\to -6}\frac{16s+36}{s(s+4)}=-5$$

$$\to V_O(s)=\frac{1.5}{s}+\frac{3.5}{s+4}-\frac{5}{s+6}\to v_o(t)=\left(1.5+3.5e^{-4t}-5e^{-6t}\right)u(t)$$



◄ مثال ۳-۵:

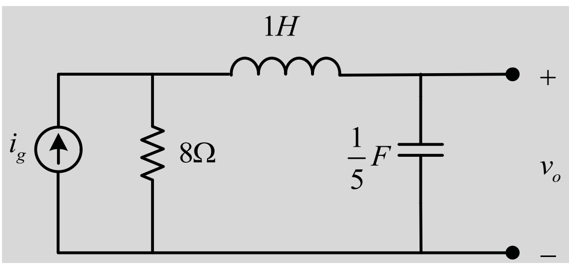
برای مدار شکل روبرو:

الف) تابع تبدیل

ب) پایداری مطلق

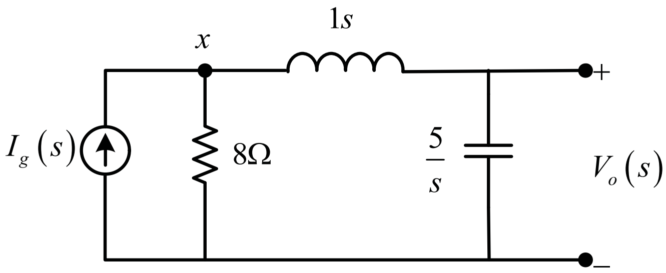
ج) پاسخ سیستم به ورودی $i_g=3u(t)$

را محاسبه نمایید.



حل:

برای محاسبه تابع تبدیل، ابتدا مدار را به حوزه لاپلاس منتقل می کنیم:



با نوشتن معادله گره x داریم:

$$I_g(s)=\frac{V_x(s)}{8}+\frac{V_x(s)}{s+\frac{5}{s}}=V_x(s)\left(\frac{1}{8}+\frac{s}{s^2+5}\right)$$

$$\rightarrow I_g(s)=V_x(s)\left(\frac{s^2+8s+5}{8\left(s^2+5\right)}\right)$$

از طرفی:

$$V_o(s)=\frac{\frac{5}{s}}{s+\frac{5}{s}}V_x(s)=\frac{5}{s^2+5}V_x(s)=\left(\frac{5}{\cancel{s^2+5}}\right)\left(\frac{8\cancel{\left(s^2+5\right)}}{s^2+8s+5}\right)I_g(s)$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{V_o(s)}{I_g(s)}=\frac{40}{s^2+8s+5}$$

برای بررسی پایداری باید قطب های تابع تبدیل را محاسبه کنیم:

$$s^2+8s+5=0$$

$$\rightarrow \Delta=64-20=44$$

$$\rightarrow s_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{44}}{2}=\begin{cases}-7.3\\-0.68\end{cases}$$

بنابراین مدار پایدار است. برای محاسبه خروجی مدار به ورودی $i_g=3u(t)$ داریم:

$$i_g=3u(t)\rightarrow I_g(s)=\frac{3}{s}$$

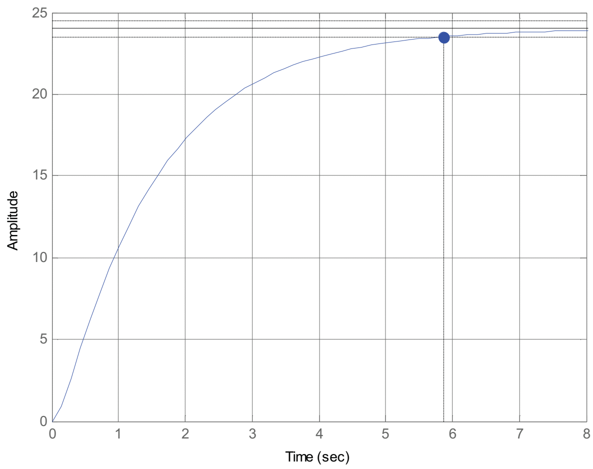
$$\rightarrow H(s)=\frac{V_o(s)}{I_g(s)}=\frac{40}{s^2+8s+5}\rightarrow V_o(s)=\frac{40}{s^2+8s+5}\times\frac{3}{s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+7.3}+\frac{C}{s+0.68}$$

$$A=\lim_{s\to 0}sV_O(s)=\lim_{s\to 0}\frac{120}{\left(s^2+8s+5\right)}=24$$

$$B=\lim_{s\to -7.3}(s+7.3)V_O(s)=\lim_{s\to -7.3}\frac{120}{s(s+0.68)}=2.5$$

$$C=\lim_{s\to -0.68}`(s+0.68)V_O(s)=\lim_{s\to -0.68}\frac{120}{s(s+7.3)}=-26.5$$

$$V_o(s)=\frac{24}{s}+\frac{2.5}{s+7.3}-\frac{26.5}{s+0.68}\rightarrow v_o(t)=\left(24+2.5e^{-7.3s}-26.5e^{-0.68}\right)u(t)$$



۳-۴- رابطه تابع تبدیل و پاسخ حالت دائمی سینوسی:

اگر تابع تبدیل مداری در دسترس باشد، برای محاسبه پاسخ حالت دائمی سینوسی دیگر نیازی به محاسبات فازوری نیست. در اینصورت پاسخ مدار به یک ورودی سینوسی به فرم $x(t)=A\cos(\omega t+\theta)$ با استفاده از تابع تبدیل $H(s)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$y_{ss}(\infty)=A\left|H(j\omega)\right|\cos(\omega t+\theta+\measuredangle H(j\omega)) \qquad ۳-۹$$

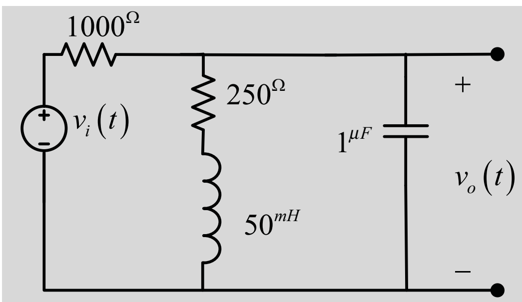
با استفاده از این معادله محاسبات حالت دائمی سینوسی بسیار راحت خواهد بود.

◄ مثال ۳-۶:

منبع ولتاژ سینوسی مدار روبرو دارای ولتاژی بصورت

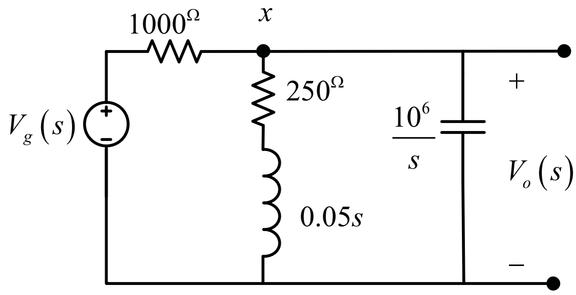
$$v_i(t)=120\cos(5000t+30^\circ)$$

می باشد. $v_{O_{ss}}(\infty)$ را محاسبه نمایید.



حل:

برای محاسبه تابع تبدیل، ابتدا مدار را به حوزه لاپلاس منتقل می کنیم:



با نوشتن معادله گره x داریم:

$$\frac{V_x(s)-V_i(s)}{1000}+\frac{V_x(s)}{250+0.05s}+\frac{V_x(s)}{\frac{10^6}{s}}=0\rightarrow V_x(s)\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{250+0.05s}+\frac{s}{10^6}\right)=V_i(s)\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$\rightarrow V_x(s)=V_o(s)=\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}+\frac{1}{250+0.05s}+\frac{s}{10^6}}V_i(s)=\frac{1}{1+\frac{1000}{250+0.05s}+\frac{s}{10^3}}V_i(s)$$

$$=\frac{1000(250+0.05s)}{1000(250+0.05s)+10^6+s(250+0.05s)}V_i(s)$$

$$=\frac{1000(250+0.05s)}{0.05s^2+300s+1250000}V_i(s)=\frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+5\times10^6}V_i(s)$$

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+5\times10^6}$$

برای محاسبه خروجی مدار به ورودی $v_i(t)=120\cos(5000t+30^\circ)$ داریم:

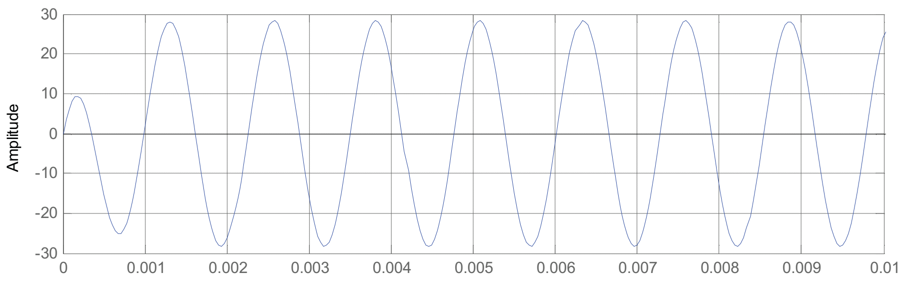
$$v_i(t)=120\cos(5000t+30^\circ)\rightarrow\begin{cases}A=120\\ \omega=5000\\ \theta=30^\circ\end{cases}$$

$$H(s)=\frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25\times10^6}\rightarrow H(j\omega)=\frac{1000(j\omega+5000)}{(j\omega)^2+6000j\omega+25\times10^6}=\frac{1000(j\omega+5000)}{-\omega^2+6000j\omega+25\times10^6}$$

$$\rightarrow H(j5000)=\frac{1000(j\omega+5000)}{(j\omega)^2+6000j\omega+25\times10^6}=\frac{1000(j5000+5000)}{-(5000)^2+6000j\times5000+25\times10^6}=\frac{(1+j)}{6j}=-\frac{1}{6}j(1+j)$$

$$\rightarrow\begin{cases}\left|H(j5000)\right|=\frac{\sqrt{2}}{6}\\ \measuredangle H(j5000)=-45^\circ\end{cases}$$

$$\rightarrow v_o(t)=120\times\frac{\sqrt{2}}{6}\cos(5000t+30^\circ-45^\circ)=20\sqrt{2}\cos(5000t-15^\circ)$$



◀ مثال ۳-۷:

اگر ولتاژ ورودی $v_i(t)=30u(t)$ به مداری اعمال گردد، پاسخ مدار بصورت $v_o(t)=\left(50e^{-8000t}-20e^{-5000t}\right)u(t)^V$ خواهد بود. پاسخ مدار را به ورودی $v_i(t)=120\cos(6000t)^V$ محاسبه نمایید.

حل:

برای محاسبه تابع تبدیل، رابطه بین تبدیل لاپلاس ورودی و خروجی را بدست می آوریم:

$$v_i(t)=30u(t)\rightarrow V_i(s)=\frac{30}{s}$$

$$v_o(t)=\left(50e^{-8000t}-20e^{-5000t}\right)u(t)^V\rightarrow V_o(s)=50\left(\frac{1}{s+8000}\right)-20\left(\frac{1}{s+5000}\right)=\frac{50(s+5000)-20(s+8000)}{(s+8000)(s+5000)}$$

$$\rightarrow V_o(s)=\frac{30s+90000}{(s+8000)(s+5000)}$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{\dfrac{30s+90000}{(s+8000)(s+5000)}}{\dfrac{30}{s}}=\frac{s^2+3000s}{(s+8000)(s+5000)}$$

اکنون برای محاسبه خروجی مدار به ورودی $v_i(t)=120\cos(6000t)$ داریم:

$$v_i(t)=120\cos(6000t)\rightarrow\begin{cases}A=120\\\omega=6000\\\theta=0^\circ\end{cases}$$

$$H(6000j)=\frac{(6000j)^2+3000(6000j)}{(6000j+8000)(6000j+5000)}=0.21+0.47j=0.51\measuredangle 66.37^\circ$$

$$\rightarrow v_o(t)=120\times0.51\cos(6000t+66.37^\circ)=61.2\cos(6000t+66.37^\circ)$$

◄ مثال ۳-۸:

برای مدار مثال ۳-۵ اگر ورودی مدار موج $i_g=220\sqrt{2}\cos(100t)$ باشد، ولتاژ خروجی را محاسبه نمایید.

حل:

در مثال ۳-۵ تابع تبدیل سیستم بصورت

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{I_g(s)}=\frac{40}{s^2+8s+5}$$

بدست آمد. اکنون برای محاسبه خروجی مدار به ورودی $i_g=220\sqrt{2}\cos(100t)$ داریم:

$$i_g=220\sqrt{2}\cos(100t)\rightarrow\begin{cases}A=220\sqrt{2}\\\omega=100\\\theta=0^\circ\end{cases}$$

$$H(100j)=\frac{40}{(100j)^2+800j+5}=3.98\times10^{-3}\measuredangle-175^\circ$$

$$\rightarrow v_o(t)=220\sqrt{2}\times0.12\cos(100t-175^\circ)=1.24\cos(100t-175^\circ)$$

بخش چهارم

قضایای مدار

بخش چهارم: قضایای مدار

در این فصل چندین قضیه اساسی و مهم مدارهای الکتریکی را بصورت خلاصه مرور می کنیم. قضایای اصلی تحلیل مدار عبارتند از:

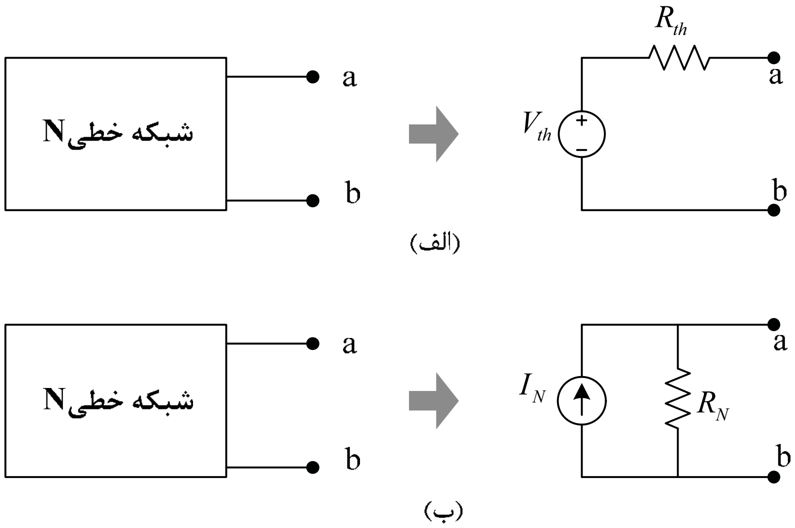
- قضیه مدار معادل تونن و نورتن
- قضیه جمع آثار
- قضیه هم پاسخی
- قضیه تلگان

اکنون به بررسی این چهار قضیه اصلی می پردازیم:

۲-

۴-۱- قضیه مدار معادل تونن و نورتن:

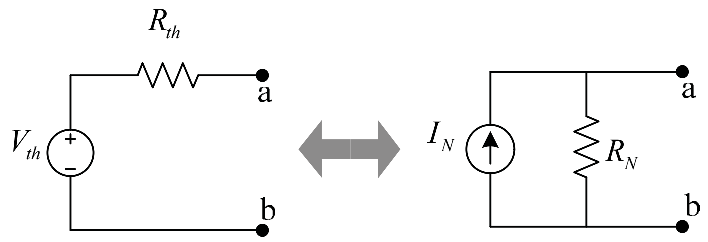
هر مدار خطی (که در اینجا آن را با یک شبکه خطی به نام N نشان می دهیم.) را در هر دو سر دلخواه می توان با یک منبع ولتاژ سری با مقاومت (مدار معادل تونن) و یا منبع جریان موازی با مقاومت (مدار معادل نورتن) جایگزین نمود.



شکل ۴-۱: الف) مدار معادل تونن ب) مدار معادل نورتن

نکته:

با استفاده از روش تبدیل منبع می توان مدارهای معادل تونن و نورتن را به یکدیگر تبدیل نمود.



$$\begin{cases} I_N = \dfrac{V_{th}}{R_{th}} \\ R_N = R_{th} \end{cases}$$

شکل ۴-۲: تبدیل دو طرفه مدار معادل تونن به مدار معادل نورتن

نکته:

در مدارهای شامل سلف و خازن، مقاومت تونن/ نورتن با امپدانس تونن/ نورتن جایگزین می شود.

یادآوری:

برای محاسبه مقادیر مدار معادل تونن بصورت زیر عمل می کنیم:

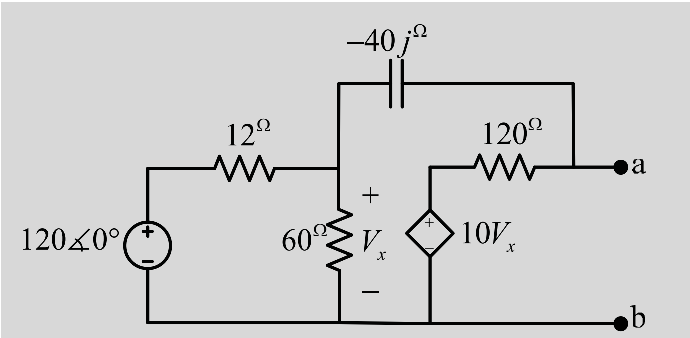
- اگر مدار شامل منابع وابسته **نباشد**، برای محاسبه مقاومت معادل تونن دیده شده از سر های a و b، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس مقاومت دیده شده از سرهای مورد نظر برابر مقاومت معادل تونن خواهد بود.
- اگر مدار شامل منابع وابسته **باشد**، برای محاسبه مقاومت معادل تونن دیده شده از سر های a و b، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس به سرهای مورد نظر یک منبع ولتاژ تست (V_t) با جریان تست (I_t) متصل می‌کنیم. مقاومت تونن برابر نسبت $\frac{V_t}{I_t}$ خواهد بود.
- برای محاسبه ولتاژ تونن (V_{th}) ابتدا سر های a و b را مدار باز کرده (اگر بخواهیم مدار معادل تونن دو سر المانی را محاسبه کنیم، شاخه مربوط به آن را در مدار، مدار باز می کنیم.) سپس به سرهای مورد نظر ولتاژ V_{th} را اختصاص داده و مدار را بر حسب V_{th} تحلیل می کنیم.

برای محاسبه مقادیر مدار معادل نورتن بصورت زیر عمل می کنیم:

- اگر مدار شامل منابع وابسته **نباشد**، برای محاسبه مقاومت معادل نورتن دیده شده از سر های a و b، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس مقاومت دیده شده از سرهای مورد نظر برابر مقاومت معادل نورتن خواهد بود.
- اگر مدار شامل منابع وابسته **باشد**، برای محاسبه مقاومت معادل نورتن دیده شده از سر های a و b، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس به سرهای مورد نظر یک منبع ولتاژ تست (V_t) با جریان تست (I_t) متصل می‌کنیم. مقاومت نورتن برابر نسبت $\frac{V_t}{I_t}$ خواهد بود.
- برای محاسبه جریان نورتن (I_N) ابتدا سر های a و b را اتصال کوتاه کرده (اگر بخواهیم مدار معادل نورتن دو سر المانی را محاسبه کنیم، شاخه مربوط به آن را در مدار، اتصال کوتاه می کنیم.) سپس به شاخه اتصال کوتاه شده جریان I_N را اختصاص داده و مدار را بر حسب I_N تحلیل می کنیم.

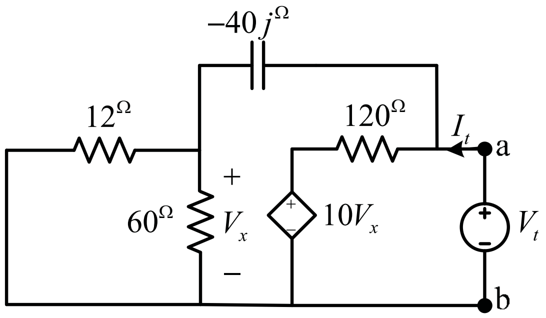
مثال ۴-۱:

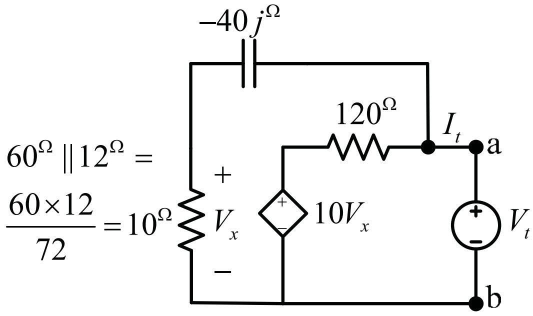
مدار معادل تونن دیده شده از سرهای a و b را در مدار شکل زیر محاسبه نمایید.



حل:

از آنجا که در این مدار منبع وابسته وجود دارد، برای محاسبه امپدانس تونن، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس به سرهای a و b یک منبع ولتاژ تست (V_t) با جریان تست (I_t) متصل می‌کنیم. امپدانس تونن برابر نسبت $\frac{V_t}{I_t}$ خواهد بود:



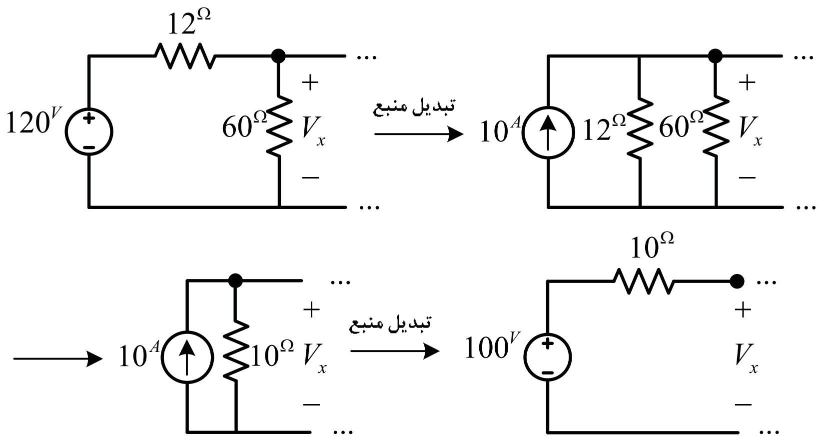


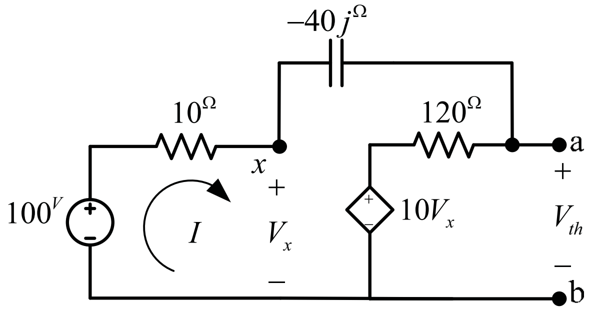
با نوشتن معادله گره a داریم:

$$\begin{cases} I_t = \dfrac{V_t - 10V_x}{120} + \dfrac{V_t}{10-40j} \\ V_x = \dfrac{10}{10-40j}V_t \end{cases} \to I_t = V_t\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{10-40j}\right) - \frac{10}{120}V_x = V_t\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{10-40j}\right) - \frac{10}{120}\left(\frac{10}{10-40j}V_t\right)$$

$$\to I_t = \left(\frac{10-40j+120-100}{120(10-40j)}\right)V_t = \left(\frac{30-40j}{120(10-40j)}\right)V_t \to Z_{th} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{120(10-40j)}{30-40j} \cong 91.2 - 38.4j$$

برای محاسبه ولتاژ تونن (V_{th}) ابتدا سرهای a و b را مدار باز کرده، سپس به سرهای مورد نظر ولتاژ V_{th} را اختصاص می دهیم. سپس با تبدیل منبع داریم:





اکنون مدار را بر حسب V_{th} تحلیل می کنیم. با نوشتن معادله در حلقه نشان داده شده داریم:

$$-100+10I-(40j)I+120I+10V_x=0 \to 100=(130-40j)I+10V_x$$

از طرفی:

$$V_x=100-10I$$

می باشد. بنابراین V_x بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$100=(130-40j)I+10(100-10I)=(130-40j-100)I+1000$$

$$\to -900=(30-40j)I$$

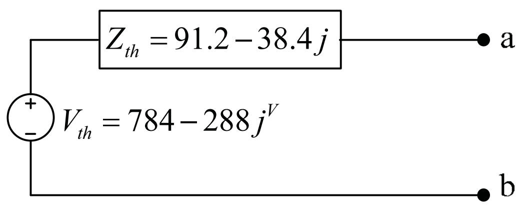
$$I=\frac{-900}{30-40j}=18\measuredangle -126.87^{\circ}=$$

$$V_x=100-10I=208+144j$$

در نهایت داریم:

$$V_{Th}=10V_x+120I=784-288j$$

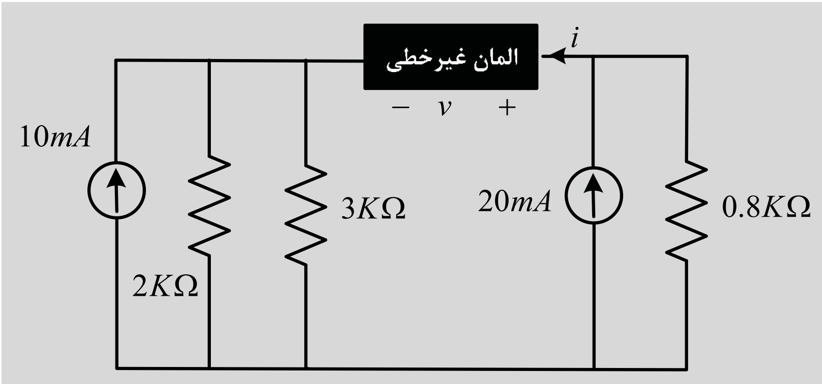
بنابراین مدار معادل تونن بصورت زیر خواهد بود:



یکی از کاربردهای مهم مدار معادل تونن/ نورتن، محاسبه ولتاژ و جریان المان های غیر خطی است که بخاطر خاصیت غیرخطی بودن آنها نمی توان روش های معمول مداری را برای آنها بکار برد. با بدست آوردن مدار معادل تونن/ نورتن دو سر آنها و نوشتن معادله KCL/KVL مربوطه می توان ولتاژ یا جریان المان مورد نظر را محاسبه نمود. به مثال زیر توجه کنید:

◄ مثال ۴-۲:

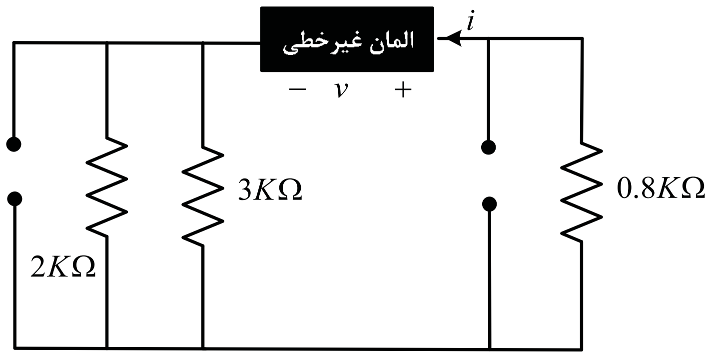
با استفاده از قضیه مدار معادل تونن، ولتاژ و جریان عنصر غیر خطی مدار زیر را محاسبه نمایید.



$$10i = 5(v^2 - 4v)$$

حل:

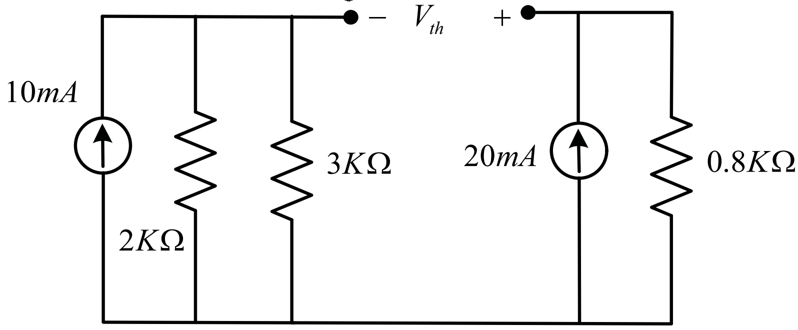
ابتدا مدار معادل تونن دو سر المان غیرخطی را محاسبه می کنیم. از آنجا که در این مدار منبع وابسته وجود ندارد، برای محاسبه امپدانس تونن، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس مقاومت دیده شده از سرهای مورد نظر برابر مقاومت معادل تونن خواهد بود:



با توجه به مدار ساده شده، مقاومت معادل دیده شده از سرهای المان غیرخطی، برابر است با:

$$R_{th} = (2 \| 3) + 0.8 = \frac{2\times 3}{5} + 0.8 = 2^{\Omega}$$

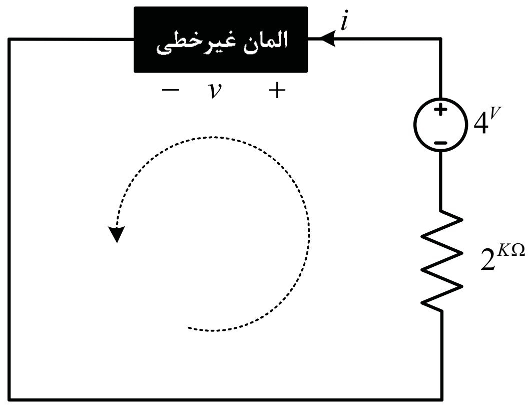
برای محاسبه ولتاژ تونن (V_{th}) ابتدا سرهای a و b را مدار باز کرده، سپس به سرهای مورد نظر ولتاژ V_{th} را اختصاص می دهیم:



اکنون مدار را بر حسب V_{th} تحلیل می کنیم:

$$\begin{cases} V_a = 20\times 0.8 = 16 \\ V_b = 10\times(2\parallel 3) = 12 \end{cases} \rightarrow V_{th} = V_a - V_b = 4^V$$

بنابراین مدار معادل تونن بصورت زیر خواهد بود:



بنابراین:

$$2i - 4 + v = 0 \rightarrow i = \frac{4-v}{2} \rightarrow \begin{cases} i = \dfrac{4-v}{2} \\ 10i = 5(v^2 - 4v) \end{cases}$$

$$\rightarrow 10\left(\frac{4-v}{2}\right) = 5(v^2 - 4v) \rightarrow 5(4-v) = -5v(4-v) \rightarrow \begin{cases} v = -1 \\ v = 4 \end{cases}$$

۴-۲- قضیه جمع آثار:

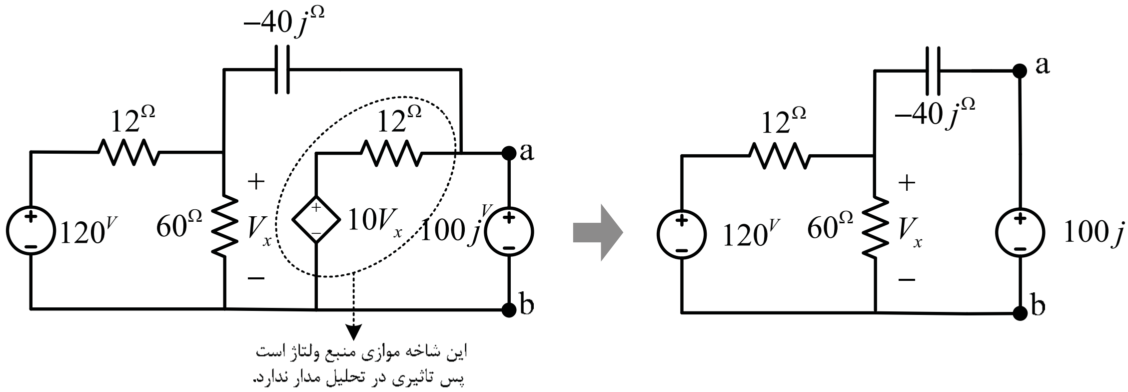
برای هر شبکه خطی با چندین ورودی، پاسخ کامل برابر جمع پاسخ های مدار به تک تک ورودی ها (منابع مستقل) می باشد. با یک مثال این قضیه مهم را یادآوری می کنیم:

مثال ۴-۳:

اگر به مدار مثال ۴-۱ در سرهای a و b یک منبع ولتاژ $100j$ متصل گردد، ولتاژ مقاومت 60^Ω را به روش جمع آثار محاسبه نمایید.

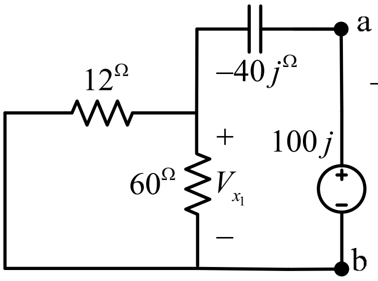
حل:

مدار مثال ۴-۱ با حضور منبع $100j$ بصورت زیر خواهد بود:



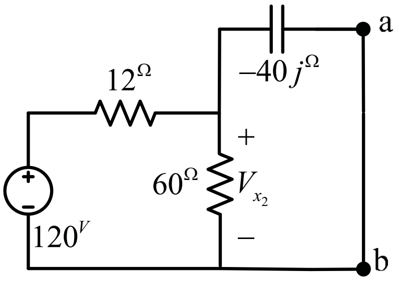
اکنون مدار دارای دو منبع ورودی است به روش جمع آثار هر بار یکی از منابع را حذف نموده و پاسخ مدار را به حضور تک منبع بررسی می کنیم:

۱- حذف منبع 120^V:



$$\to V_{x_1}=\frac{(60\parallel 12)}{(60\parallel 12)-40j}\times 100j$$
$$=\frac{10}{10-40j}\times 100j$$
$$=-23.5294+5.8824j$$

۲- حذف منبع $100j^V$:



$$\to V_{x_2}=\frac{(60\parallel -40j)}{(60\parallel -40j)+12}\times 120$$
$$=94.11-23.52j$$

بنابراین ولتاژ خروجی برابر است با:

$$V_x=V_{x_1}+V_{x_2}=70.61-17.64j$$

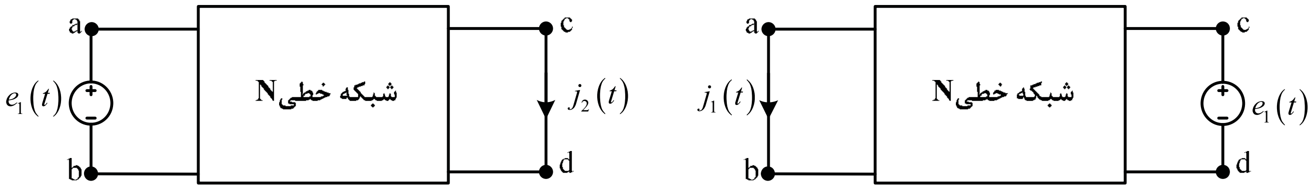
۴-۳- قضیه هم پاسخی:

برای یک شبکه خطی و تغییر ناپذیر با زمان، بدون حضور منابع وابسته و مستقل سه بیان زیر به نام قضیه هم پاسخی برقرار است:

بیان اول قضیه هم پاسخی:

منبع ولتاژ $e_1(t)$ را به سرهای a و b متصل کرده و پاسخ جریان حالت صفر $j_2(t)$ را که از اتصال کوتاه کردن سرهای c و d بدست می آید محاسبه می کنیم. سپس همان منبع $e_1(t)$ را به سرهای c و d متصل نموده و جریان حالت صفر $j_1(t)$ را که از اتصال کوتاه کردن سرهای a و b بدست می آید محاسبه می کنیم. قضیه هم پاسخی بیان می دارد که توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه هر چه باشد، همواره خواهیم داشت:

$$j_1(t)=j_2(t)$$



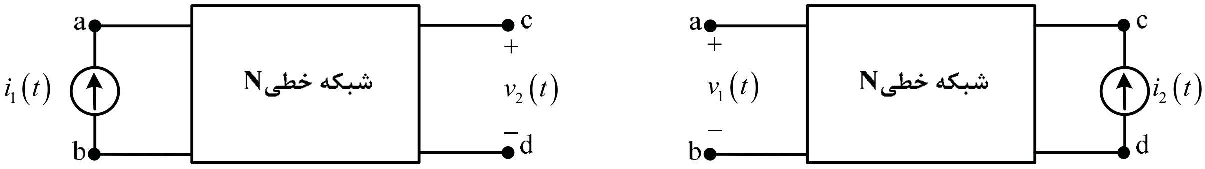
$$j_1(t)=j_2(t)$$

شکل ۴-۳: بیان اول قضیه هم پاسخی

بیان دوم قضیه هم پاسخی:

منبع جریان $i_1(t)$ را به سرهای a و b متصل کرده و پاسخ ولتاژ حالت صفر $v_2(t)$ را که از مدار باز کردن سرهای c و d بدست می آید محاسبه می کنیم. سپس همان منبع $i_1(t)$ را به سرهای c و d متصل نموده و پاسخ ولتاژ حالت صفر $v_1(t)$ را که از مدار باز کردن سرهای a و b بدست می آید محاسبه می کنیم. قضیه هم پاسخی بیان می دارد که توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه هر چه باشد، همواره خواهیم داشت:

$$v_1(t)=v_2(t)$$



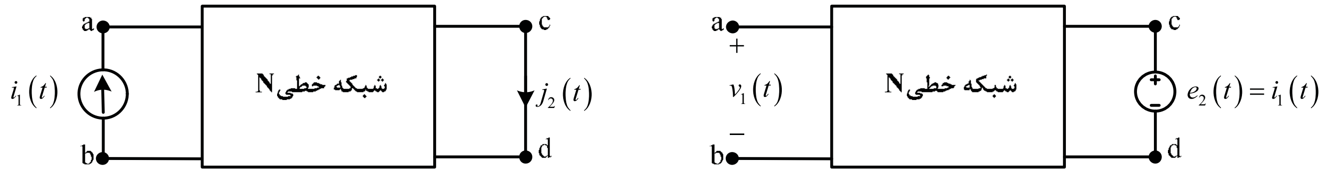
$$v_1(t)=v_2(t)$$

شکل ۴-۴: بیان دوم قضیه هم پاسخی

بیان سوم قضیه هم پاسخی:

منبع جریان $i_1(t)$ را به سرهای a و b متصل کرده و پاسخ جریان حالت صفر $j_2(t)$ را که از اتصال کوتاه کردن سرهای c و d بدست می آید محاسبه می کنیم. سپس منبع $e_2(t)=i_1(t)$ را به سرهای c و d متصل نموده و پاسخ ولتاژ حالت صفر $v_1(t)$ را که از مدار باز کردن سرهای a و b بدست می آید محاسبه می کنیم. قضیه هم پاسخی بیان می دارد که توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه هر چه باشد، همواره خواهیم داشت:

$$v_1(t)=j_2(t)$$

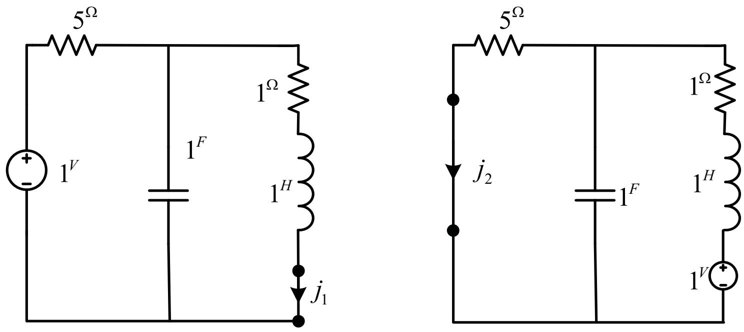


$$v_1(t) = j_2(t)$$

شکل ۴-۵: بیان سوم قضیه هم پاسخی

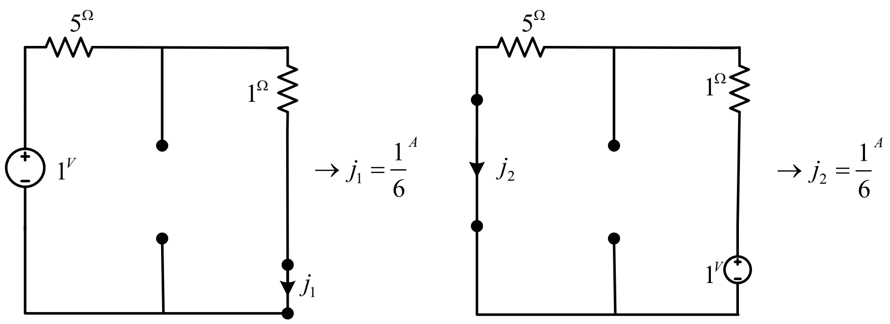
مثال ۴-۴:

الف) برای مدارهای شکل زیر نشان دهید که $j_1 = j_2$.

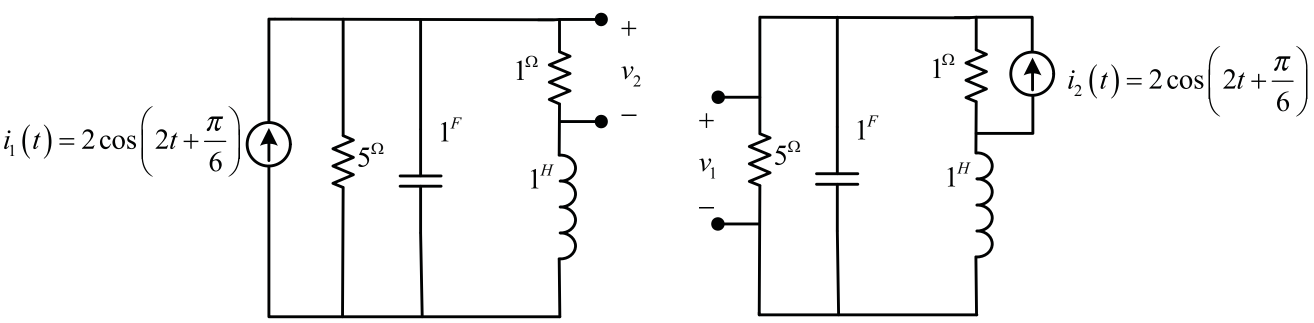


حل:

اگر منبع ولتاژ را بعنوان ورودی مدار های فوق در نظر بگیریم، مابقی مدار یک شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود. بنابراین شرایط بیان ۱ قضیه هم پاسخی بر قرار خواهد بود. حضور منابع DC در مدارهایی که شامل سلف و خازن هستند سبب می شود که سلف اتصال کوتاه شده و خازن مدار باز شود:

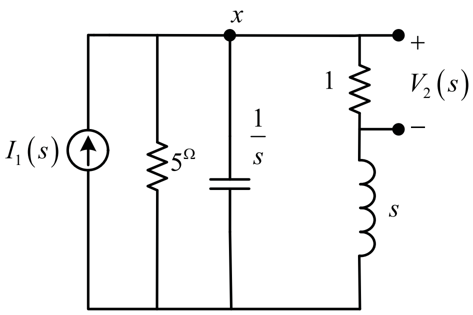


ب) برای مدارهای شکل زیر نشان دهید که $v_1 = v_2$.



اگر منبع جریان را بعنوان ورودی مدار های فوق در نظر بگیریم، مابقی مدار یک شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود. بنابراین

شرایط بیان ۲ قضیه هم پاسخی بر قرار خواهد بود. ورودی مدارها سینوسی است بنابراین برای محاسبه پاسخ حالت دائمی سینوسی ابتدا مدار را به حوزه لاپلاس منتقل نموده و سپس پاسخ را محاسبه می کنیم:



$$\begin{cases} I_1(s)=\dfrac{V_x(s)}{5}+\dfrac{V_x(s)}{\frac{1}{s}}+\dfrac{V_x(s)}{1+s}=V_x(s)\left(\dfrac{1}{5}+s+\dfrac{1}{1+s}\right) \\ V_2(s)=\left(\dfrac{1}{1+s}\right)V_x(s)\rightarrow V_x(s)=(s+1)V_2(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1(s)=(s+1)\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{1+s}\right)V_2(s)=\cancel{(s+1)}\left(\frac{(s+1)+5s(s+1)+5}{5\cancel{(s+1)}}\right)V_2(s)$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{V_2(s)}{I_1(s)}=\frac{5}{5s^2+6s+6}$$

بنابراین:

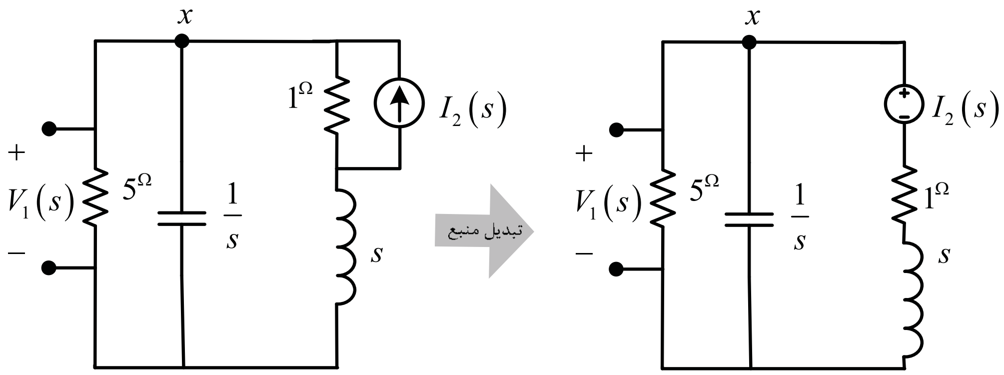
$$i_1(t)=2\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow\begin{cases} A=2 \\ \omega=2 \\ \theta=\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$H(s)=\frac{5}{5s^2+6s+6}\rightarrow H(j2)=\frac{5}{5(j2)^2+6(j2)+6}$$

$$\rightarrow\begin{cases} |H(j2)|=0.27 \\ \measuredangle H(j2)=-139^\circ \end{cases}$$

$$\rightarrow v_1(t)=2\times 0.27\cos(2t+30^\circ-139^\circ)=0.54\cos(2t-109^\circ)$$

برای مدار دوم داریم:



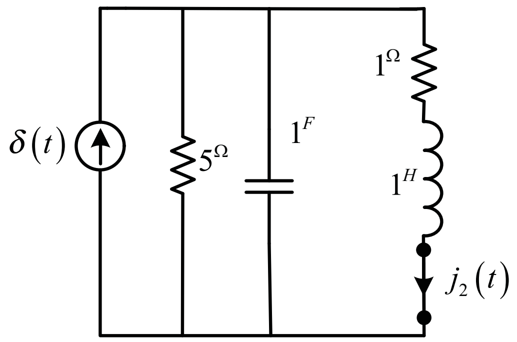
$$\frac{V_1(s)}{5}+\frac{V_1(s)}{\frac{1}{s}}+\frac{V_1(s)-I_2(s)}{1+s}=0\rightarrow V_1(s)\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{s+1}\right)=\left(\frac{1}{s+1}\right)I_2(s)$$

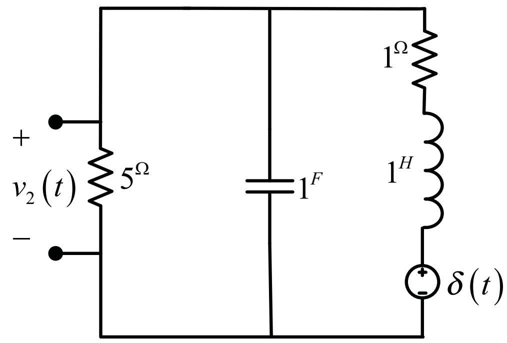
$$\rightarrow H(s)=\frac{V_1(s)}{I_2(s)}=\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{1}{5}+s+\frac{1}{s+1}}=\frac{5}{5s^2+6s+6}$$

تابع تبدیل و ورودی مدارها یکسان است بنابراین داریم:

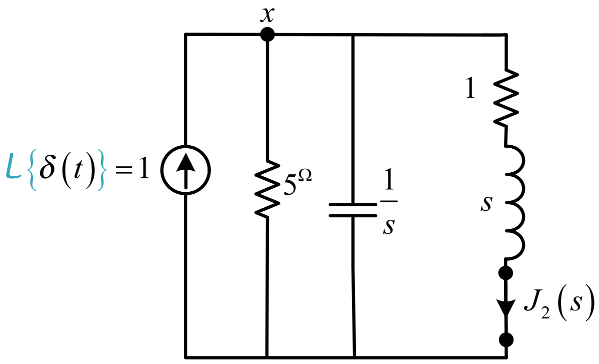
$$\rightarrow v_1(t)=2\cos(2t-109^\circ)$$

ج) برای مدارهای شکل زیر نشان دهید که $v_1 = j_2$.





اگر منبع جریان و ولتاژ را بعنوان ورودی مدار های فوق در نظر بگیریم، مابقی مدار یک شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود. بنابراین شرایط بیان ۳ قضیه هم پاسخی بر قرار خواهد بود. ورودی مدارها سینوسی است بنابراین برای محاسبه پاسخ حالت دائمی سینوسی ابتدا مدار را به حوزه لاپلاس منتقل نموده و سپس پاسخ را محاسبه می کنیم:



$$1=\frac{V_x(s)}{5}+\frac{V_x(s)}{\frac{1}{s}}+\frac{V_x(s)}{1+s}\rightarrow V_x(s)\left(\frac{1}{s}+s+\frac{1}{s+1}\right)=1$$

$$\rightarrow V_x(s)=\frac{1}{\left(\frac{1}{s}+s+\frac{1}{s+1}\right)}=\frac{5(s+1)}{5s^2+6s+6}$$

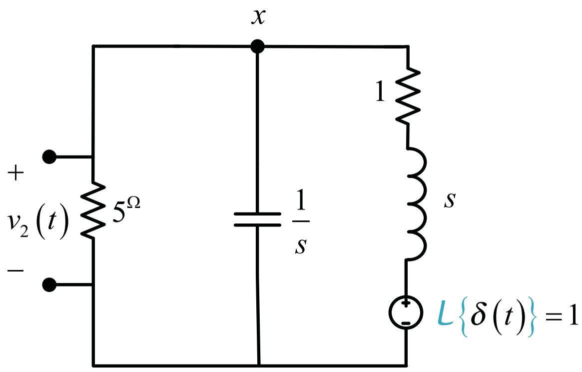
$$\rightarrow J_2(s)=\frac{V_x(s)}{1+s}=\frac{5}{5s^2+6s+6}$$

$$\rightarrow J_2(s)=\frac{5}{5s^2+6s+6}=\frac{1}{s^2+1.2s+1.2}=\frac{1}{(s+0.6)^2+(0.92)^2}=\frac{1}{0.92}\times\frac{0.92}{(s+0.6)^2+(0.92)^2}$$

$$s^2+1.2s+1.2=s^2+2\times0.6s+0.6^2+\left(\underbrace{1.2-0.6^2}_{=0.84}\right)=s^2+2\times0.6s+0.6^2+0.92^2=(s+0.6)^2+(0.92)^2$$

$$j_2(t)=1.09e^{-0.6t}\sin(0.92t)u(t)$$

برای مدار دوم داریم:



$$\frac{V_2(s)}{5}+\frac{V_2(s)}{\frac{1}{s}}+\frac{V_2(s)-1}{1+s}\rightarrow V_2(s)\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{s+1}$$

$$\rightarrow V_2(s)=\frac{\frac{1}{s+1}}{\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{s+1}\right)}=\frac{5}{5s^2+6s+6}$$

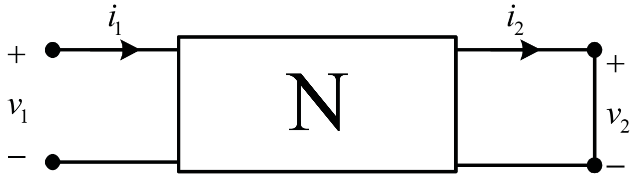
$$v_2(t)=1.09e^{-0.6t}\sin(0.92t)u(t)$$

نکته:

نتیجه مهم قضیه هم پاسخی اینست که برای شبکه های خطی تغییرناپذیر با زمان، تابع تبدیل شبکه ثابت است و به جنس سیگنال ورودی و یا جایگاه آن بستگی ندارد.

◄ مثال ۴-۵:

در آزمایش انجام شده بر روی شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان N نتایج زیر حاصل شده است.



$$v_1(t)=\delta(t)^{\,V}\rightarrow i_2(t)=(1-e^{-2t}-te^{-2t})u(t)^{\,A}$$

ولتاژ ورودی این شبکه را به ازای $v_2(t)=20\sin(2t-90)\,V$ محاسبه نمایید.

حل:

شبکه داده شده در شرایط قضیه هم پاسخی صدق می کند. بر طبق بیان سوم قضیه هم پاسخی، اگر تابع تبدیل مدار در دسترس باشد، با داشتن ورودی $v_2(t)=20\sin(2t-90)\,V$ می توان خروجی $v_1(t)$ را محاسبه نمود. برای محاسبه تابع تبدیل شبکه از ورودی – خروجی داده شده استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} v_1(t)=\delta(t)^{\,V}\rightarrow V_1(s)=1 \\ i_2(t)=(1-e^{-2t}-te^{-2t})u(t)^{\,A}\rightarrow I_2(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{(s+2)^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{I_2(s)}{V_1(s)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}=\frac{(s+2)^2-s(s+2)-s}{s(s+2)^2}=\frac{\cancel{s^2}+4s+4-\cancel{s^2}-2s-s}{s(s+2)^2}=\frac{s+4}{s(s+2)^2}$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{V_1(s)}{V_2(s)}=\frac{s+4}{s(s+2)^2}$$

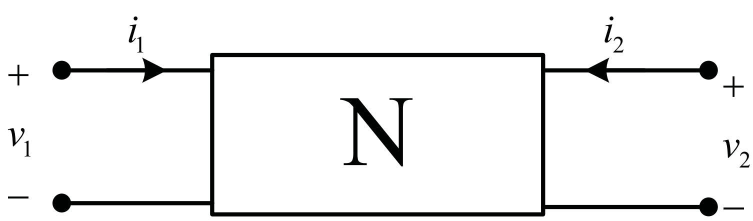
$$v_2(t)=20\sin(2t-90)=20\cos(2t)\rightarrow\begin{cases} A=20 \\ \omega=2 \\ \theta=0^\circ \end{cases}$$

$$H(s)=\frac{s+4}{s(s+2)^2}\rightarrow H(j2)=\frac{(j2)+4}{(j2)((j2)+2)^2}=-0.25-0.125j\rightarrow\begin{cases} |H(j2)|=0.28 \\ \measuredangle H(j2)=-153.5^\circ \end{cases}$$

$$\rightarrow v_1(t)=20\times 0.28\cos(2t-153.5^\circ)=5.6\cos(2t-153.5^\circ)$$

◄ مثال ۴-۶:

در آزمایش انجام شده بر روی شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان N نتایج زیر حاصل شده است.



$$v_1(t)=u(t)V \to v_2(t)=(1-e^{-3t}-te^{-3t})u(t)V$$

ولتاژ ورودی این شبکه را به ازای $i_2(t)=50\cos(t)V$ محاسبه نمایید.

حل:

شبکه داده شده در شرایط قضیه هم پاسخی صدق می کند. بر طبق بیان سوم قضیه هم پاسخی، اگر تابع تبدیل مدار در دسترس باشد، با داشتن ورودی $i_2(t)=50\cos(t)V$ می توان خروجی $v_1(t)$ را محاسبه نمود. برای محاسبه تابع تبدیل شبکه از ورودی – خروجی داده شده استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} v_1(t)=u(t)^V \to V_1(s)=\dfrac{1}{s} \\ v_2(t)=(1-e^{-2t}-te^{-2t})u(t)^A \to V_2(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{1}{(s+3)^2} \end{cases}$$

$$\to H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{(s+2)^2}}{\dfrac{1}{s}}=\frac{\dfrac{(s+3)^2-s(s+3)-s}{\cancel{s}(3+2)^2}}{\dfrac{1}{\cancel{s}}}=\frac{\cancel{s^2}+6s+9-\cancel{s^2}-3s-s}{(s+3)^2}=\frac{2s+9}{(s+3)^2}$$

$$\to H(s)=\frac{V_1(s)}{V_2(s)}=\frac{2s+9}{(s+3)^2}$$

$$i_2(t)=50\cos(t)\to\begin{cases} A=50 \\ \omega=1 \\ \theta=0° \end{cases}$$

$$H(s)=\frac{2s+9}{(s+3)^2}\to H(j)=\frac{2j+9}{(j+3)^2}=0.84-0.38j$$

$$\to\begin{cases} |H(j)|=0.92 \\ \measuredangle H(j)=-24.34° \end{cases}$$

$$\to v_1(t)=0.92\times 50\cos(t-24.347°)=46\cos(t-24.347°)$$

۴-۴- قضیه تلگان:

شبکه مداری فشرده ای دلخواهی را به گونه ای در نظر بگیرید که گراف مداری آن b شاخه و n_t گره داشته باشد. اگر ولتاژ و جریان شاخه kام این گراف را v_k و j_k نامگذاری کنیم، داریم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k\, j_k=0 \qquad (۱-۴)$$

نکته:

نتیجه مهم قضیه تلگان، برقراری تعادل توان در شبکه های فشرده ایده آل است. یعنی توان تولیدی برابر توان مصرفی مدار است.

اگر v_k و j_k ولتاژ و جریان شاخه kام گراف مداری باشد که در قوانین جریان و ولتاژ کیرشف صدق می کنند، برای همان شاخه با ولتاژ و جریان دیگری نظیر $\hat{v}_k$ و $\hat{j}_k$ که در قوانین جریان و ولتاژ کیرشف صدق می کنند، داریم:

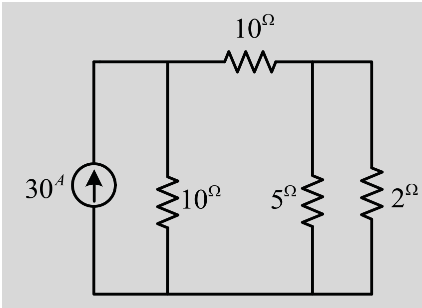
$$\sum_{k=1}^{b} v_k\,\hat{j}_k = 0 \qquad \text{۲-۴}$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k\,j_k = 0 \qquad \text{۳-۴}$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k\,\hat{j}_k = 0 \qquad \text{۴-۴}$$

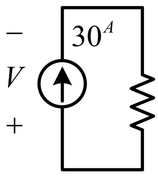
◄ مثال ۴-۷:

با استفاده از قضیه تلگان، تعادل توان را در مدار زیر بررسی کنید:



حل:

با ساده سازی مدار داریم:



$$\left(\left(2\parallel 5\right)+10\right)\parallel 10=\left(\frac{10}{7}+10\right)\parallel 10=\frac{80}{7}\parallel 10=\frac{\frac{80}{7}\times 10}{\frac{150}{7}}=\frac{80}{15}^{\Omega}$$

اکنون توان مقاومت و منبع بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$P_R=I_R^2R=\left(30\right)^2\times\frac{80}{15}=\frac{900\times 80}{15}=4800^{W}$$

$$\rightarrow V=I_RR=-30\times\frac{80}{15}$$

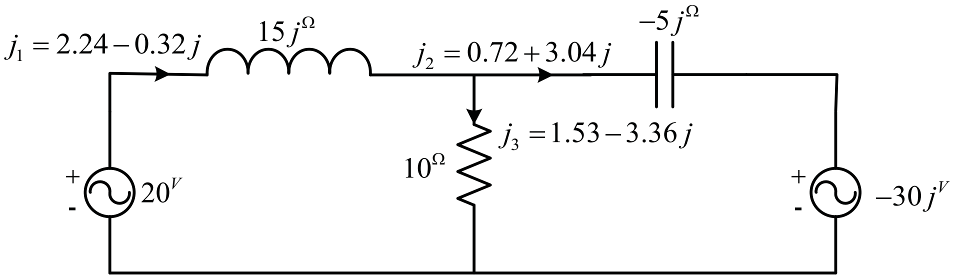
$$P_I=I.V=30\left(-30\times\frac{80}{15}\right)=-4800^{W}$$

بنابراین تعادل توان در مدار برقرار است.

◄ مثال ۴-۸:

با استفاده از قضیه تلگان، تعادل توان را در مدار مثال ۱-۹ بررسی کنید.

حل:



توان تک تک المان های مدار برابر است با:

$$P_{20^V} = 20\times\left(-\overline{j_1}\right) = 20\times\left(-2.24-0.32j\right) = -44-6.4j$$

$$P_{-30j^V} = \left(-30j\right)\times\overline{j_2} = \left(-30j\right)\left(0.72-3.04j\right) = -91.2-21.6j$$

$$P_{15j} = \left|j_1\right|^2\left(15j\right) = \left|\left(2.24-0.32j\right)\right|^2\left(15j\right) = 76.8j$$

$$P_{10} = \left|j_3\right|^2\left(10\right) = \left|\left(1.53-3.36j\right)\right|^2\left(10\right) = 136.305$$

$$P_{-5j} = \left|j_2\right|^2\left(-5j\right) = \left|\left(0.72+3.04j\right)\right|^2\left(-5j\right) = -48.8j$$

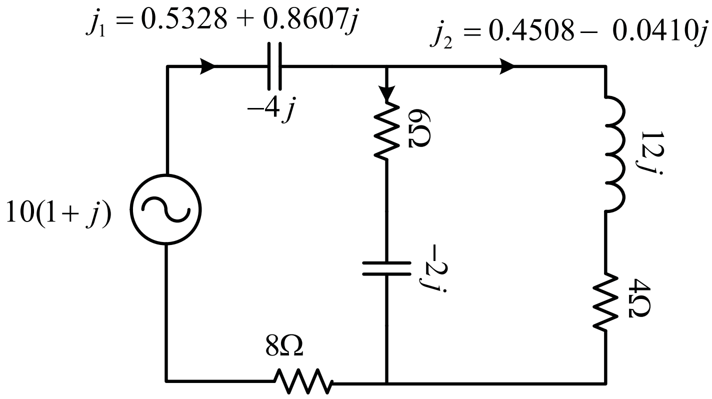
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} P_k &= P_{20^V} + P_{-30j^V} + P_{15j} + P_{10} + P_{15j}\\ &= \left(-44-6.4j\right)+\left(-91.2-21.6j\right)+\left(76.8j\right)+\left(136.305\right)+\left(-48.8j\right)\\ &\cong 0\end{aligned}$$

بنابراین تعادل توان در مدار برقرار است.

مثال ۴-۹:

با استفاده از قضیه تلگان، تعادل توان را در مدار مثال ۱-۱۰ بررسی کنید.

حل:



ابتدا امپدانس معادل مدار را محاسبه می کنیم:

$$\left(8-4j\right)+\left(\left(6-2j\right)\|\left(4+12j\right)\right) = \left(8-4j\right)+\frac{\left(6-2j\right)\left(4+12j\right)}{\left(6-2j\right)+\left(4+12j\right)} = 13.6-3.2j$$

بنابراین داریم:

$$P_{10+10j} = \left(10+10j\right)\times\left(-\overline{j_1}\right) = \left(10+10j\right)\times\left(-0.5328+0.8607j\right) = -13.935+3.279j$$

$$P_{13.6-3.2j} = \left(13.6-3.2j\right)\times\left(\left|j_1\right|^2\right) = \left(13.6-3.2j\right)\left(\left|+0.5328+0.8607j\right|^2\right) = +13.935-3.279j$$

بنابراین تعادل توان در مدار برقرار است.

مثال ۴-۱۰:

در یک شبکه RLC جریان و ولتاژ سه شاخه در فرکانس 50^{Hz} اندازه گیری شده اند. $\hat{V}_3$ را محاسبه نمایید.

$$\begin{cases} V_1 = 10\measuredangle 20^\circ & I_1 = 2\measuredangle 25^\circ \\ V_2 = 12\measuredangle 35^\circ & I_2 = 10\measuredangle -10^\circ \\ V_3 = 5\measuredangle 15^\circ & I_3 = 14.93\measuredangle 68^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{V}_1 = 5\measuredangle 5^\circ & \hat{I}_1 = 12\measuredangle 40^\circ \\ \hat{V}_2 = 15\measuredangle -20^\circ & \hat{I}_2 = 8\measuredangle 10^\circ \\ \hat{V}_3 = ? & \hat{I}_3 = 10\measuredangle 15^\circ \end{cases}$$

حل:

طبق قضیه تلگان برای این سه شاخه داریم:

$$\begin{cases} V_1 = 10\measuredangle 20^\circ & I_1 = 2\measuredangle 25^\circ \\ V_2 = 12\measuredangle 35^\circ & I_2 = 10\measuredangle -10^\circ \\ V_3 = 5\measuredangle 15^\circ & I_3 = 14.93\measuredangle 68^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{V}_1 = 5\measuredangle 5^\circ & \hat{I}_1 = 12\measuredangle 40^\circ \\ \hat{V}_2 = 15\measuredangle -20^\circ & \hat{I}_2 = 8\measuredangle 10^\circ \\ \hat{V}_3 = ? & \hat{I}_3 = 10\measuredangle 15^\circ \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{b} V_k \hat{I}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{V}_k I_k$$

$$\to V_1\hat{I}_1 + V_2\hat{I}_2 + V_3\hat{I}_3 + \cancel{\sum_{k=4}^{b} V_k \hat{I}_k} = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 + \hat{V}_3 I_3 + \cancel{\sum_{k=4}^{b} \hat{V}_k I_k}$$

$$\to V_1\hat{I}_1 + V_2\hat{I}_2 + V_3\hat{I}_3 = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 + \hat{V}_3 I_3$$

$$\to (10\measuredangle 20^\circ)(12\measuredangle 40^\circ) + (12\measuredangle 35^\circ)(8\measuredangle 10^\circ) + (5\measuredangle 15^\circ)(10\measuredangle 15^\circ)$$

$$= (5\measuredangle 5^\circ)(2\measuredangle 25^\circ) + (15\measuredangle -20^\circ)(10\measuredangle -10^\circ) + (\hat{V}_3)(14.93\measuredangle 68^\circ)$$

$$\to (120\measuredangle 60^\circ) + (96\measuredangle 45^\circ) + (50\measuredangle 30^\circ) = (10\measuredangle 30^\circ) + (150\measuredangle -30^\circ) + (\hat{V}_3)(14.93\measuredangle 68^\circ)$$

$$\to \hat{V}_3 = 17.3876 + 4.6686j$$

بخش پنجم

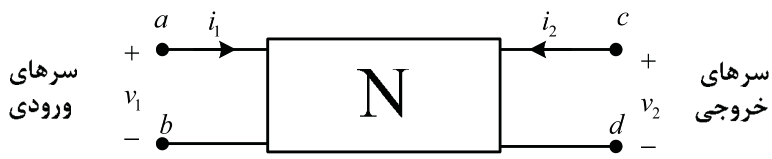
دو قطبی ها

بخش پنجم: دوقطبی ها

۳-

۵-۱- مقدمه:

در تحلیل تمام مدارهایی که تا کنون بررسی کردیم، رفتار مدار در یک زوج سر ورودی خروجی بررسی شده است. در برخی از کاربردهای مداری، محاسبه ولتاژ و جریان در دو زوج سر لازم است. بخصوص حالتهایی که ورودی از طریق یک زوج سر وارد شبکه شده و از یک زوج سر دیگر خارج می شود. به شبکه هایی که دارای دو زوج سر ورودی خروجی هستند دوقطبی گوییم.



شکل ۵-۱: شبکه دو قطبی

در تحلیل مدارهای دو قطبی چند شرط کلی را در نظر می گیریم:

- انرژی اولیه (شرایط اولیه) مدار صفر است.
- هیچ منبع مستقلی در شبکه دو قطبی وجود ندارد.
- هر اتصال خارجی تنها می تواند بین سرهای a و b یا c و d قرار گیرد.

۵-۲- معادلات سرهای یک دو قطبی:

برای تحلیل یک شبکه دو قطبی باید روابط بین v_1، i_1، v_2 و i_2 مشخص شود. توصیف شبکه های دو قطبی عموماً در حوزه لاپلاس صورت می گیرد. از آنجایی که بین این چهار متغیر، تنها دو متغیر مستقل وجود دارد، بسته به اینکه سیگنالهای ورودی- خروجی کدام یک از این چهار سیگنال باشند، ۶ حالت مختلف برای معادلات سرها بوجود می آید. از این ۶ روش تنها سه روش بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد:

۴- روش امپدانسی
۵- روش ادمیتانسی
۶- روش هیبریدی

۵-۲-۱- روش امپدانسی:

اگر در شبکه دو قطبی شکل ۵-۱ سیگنال ورودی i_1 و سیگنال خروجی v_2 باشد؛ معادلات سرها بصورت

$$\begin{cases} v_1 = z_{11}\boxed{i_1} + z_{12}i_2 \\ \boxed{v_2} = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases} \qquad ۱-۵$$

خواهند بود. از آنجا که جنس ماتریس ضرایب $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ امپدانسی است، این روش را **روش امپدانسی** گویند.

برای محاسبه پارامترهای دوقطبی Z بصورت زیر عمل می کنیم:

امپدانس دیده شده از قطب ۱ وقتی که قطب ۲ مدار باز شود: $z_{11} = \left.\dfrac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0}$

امپدانس انتقالی معادل ولتاژ قطب ۱ به جریان قطب ۲ وقتی قطب ۱ مدار باز شود: $z_{12} = \left.\dfrac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$

امپدانس انتقالی معادل ولتاژ قطب ۲ به جریان قطب ۱ وقتی قطب ۲ مدار باز شود: $z_{21} = \left.\dfrac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$

امپدانس دیده شده از قطب ۲ وقتی قطب ۱ مدار باز شود: $z_{22} = \left.\dfrac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$

۵-۲-۲- روش ادمیتانسی:

اگر در شبکه دو قطبی شکل ۵-۱ سیگنال ورودی v_1 و سیگنال خروجی i_2 باشد؛ معادلات سرها بصورت

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}\boxed{v_1} + y_{12}v_2 \\ \boxed{i_2} = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \end{cases} \qquad ۲-۵$$

خواهند بود. از آنجا که جنس ماتریس ضرایب $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ادمیتانسی است، این روش را **روش ادمیتانسی** گویند. برای محاسبه پارامترهای دوقطبی Y بصورت زیر عمل می کنیم:

ادمیتانس دیده شده از قطب ۱ وقتی که قطب ۲ اتصال کوتاه شود: $y_{11} = \left.\dfrac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$

ادمیتانس انتقالی معادل جریان قطب ۱ به ولتاژ قطب ۲ وقتی قطب ۱ اتصال کوتاه شود: $y_{12} = \left.\dfrac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0}$

ادمیتانس انتقالی معادل جریان قطب ۲ به ولتاژ قطب ۱ وقتی قطب ۲ اتصال کوتاه شود: $y_{21} = \left.\dfrac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$

ادمیتانس دیده شده از قطب ۲ وقتی قطب ۱ اتصال کوتاه شود: $y_{22} = \left.\dfrac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0}$

۵-۲-۳- روش هیبریدی:

اگر در شبکه دو قطبی شکل ۵-۱ سیگنال ورودی i_1 و سیگنال خروجی i_2 باشد؛ معادلات سرها بصورت

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}\boxed{i_1} + h_{12}v_2 \\ \boxed{i_2} = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases} \qquad ۳-۵$$

خواهند بود. از آنجا که جنس ماتریس ضرایب $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ هیبریدی است، این روش را **<u>روش هیبریدی</u>** گویند.

برای محاسبه پارامترهای دوقطبی H بصورت زیر عمل می کنیم:

امپدانس دیده شده از قطب ۱ وقتی که قطب ۲ اتصال کوتاه شود: $h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0}$

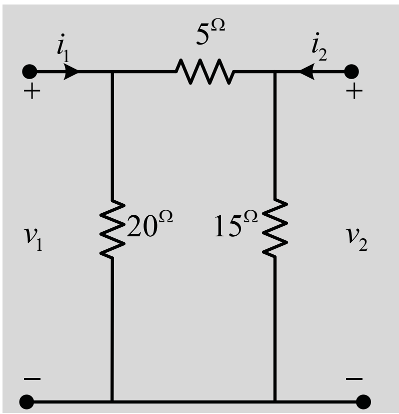
بهره ولتاژ معکوس وقتی قطب ۱ مدار باز باشد: $h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0}$

بهره جریان مستقیم وقتی که قطب ۲ اتصال کوتاه باشد: $h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$

ادمیتانس خروجی وقتی که قطب ۲ مدار باز باشد: $h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0}$

مثال ۵-۱:

پارامترهای Z شبکه مقاومتی زیر را محاسبه نمایید:



حل:

برای بدست آوردن معادلات سرها در دو گره v_1 و v_2 معادلات گره ها را می نویسیم:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1}{20} + \dfrac{V_1 - V_2}{5} \\ I_2 = \dfrac{V_2}{15} + \dfrac{V_2 - V_1}{5} \end{cases}$$

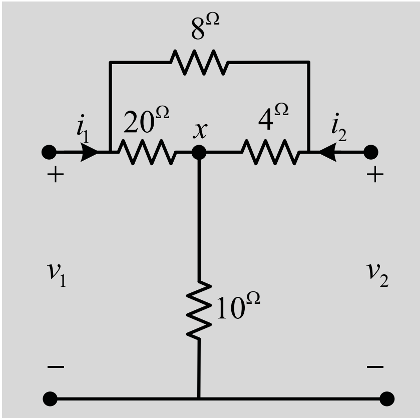
اکنون معادلات را به فرم معادلات ۵-۱ مرتب می کنیم:

$$\begin{cases} I_1=\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right)V_1-\frac{1}{5}V_2=\frac{1}{4}V_1-\frac{1}{5}V_2 \\ I_2=-\frac{1}{5}V_1+V_2\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5}V_1+\frac{4}{15}V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow Z=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 10 & 7.5 \\ 7.5 & 9.375 \end{pmatrix}$$

مثال ۵-۲:

پارامترهای Y شبکه مقاومتی زیر را محاسبه نمایید:



حل:

برای بدست آوردن معادلات سرها در گره های v_1 و v_2 و x معادلات گره ها را می نویسیم:

$$\begin{cases} I_1=\frac{V_1-V_x}{20}+\frac{V_1-V_2}{8} \\ I_2=\frac{V_2-V_x}{4}+\frac{V_2-V_1}{8} \\ \frac{V_x}{10}+\frac{V_x-V_1}{20}+\frac{V_x-V_2}{4}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1=\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{8}\right)V_1-\frac{1}{8}V_2-\frac{1}{20}V_x \\ I_2=-\frac{1}{8}V_1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)V_2-\frac{1}{4}V_x \\ V_x\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{20}V_1+\frac{1}{4}V_2 \rightarrow V_x\left(\frac{2+1+5}{\cancel{20}}\right)=\frac{1}{\cancel{20}}V_1+\frac{5}{\cancel{20}}V_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow V_x=\frac{1}{8}V_1+\frac{5}{8}V_2 \rightarrow \begin{cases} I_1=\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{8}\right)V_1-\frac{1}{8}V_2-\frac{1}{20}\left(\frac{1}{8}V_1+\frac{5}{8}V_2\right)=\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{8}-\frac{1}{160}\right)V_1+\left(-\frac{1}{8}-\frac{5}{160}\right)V_2 \\ I_2=-\frac{1}{8}V_1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)V_2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}V_1+\frac{5}{8}V_2\right)=\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}\right)V_1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{5}{32}\right)V_2 \end{cases}$$

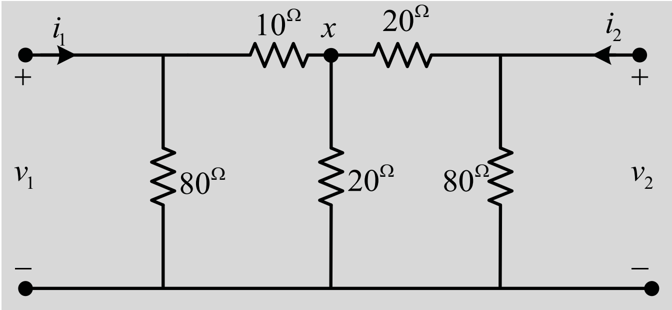
$$\rightarrow \begin{cases} I_1=\frac{27}{160}V_1-\frac{3}{4}V_2 \\ I_2=-\frac{5}{32}V_1+\frac{7}{32}V_2 \end{cases} \rightarrow Y=\begin{pmatrix} \frac{27}{160} & -\frac{5}{32} \\ -\frac{5}{32} & \frac{7}{32} \end{pmatrix}$$

نکته:

ماتریس های Z و Y با یکدیگر نسبت عکس دارند.

◀ مثال ۵-۳:

پارامترهای H شبکه مقاومتی زیر را محاسبه نمایید:



حل:

برای بدست آوردن معادلات سرها در گره های v_1 و v_2 و x معادلات گره ها را می نویسیم:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1 - V_x}{10} + \dfrac{V_1}{80} \\ I_2 = \dfrac{V_2 - V_x}{20} + \dfrac{V_2}{80} \\ \dfrac{V_x}{20} + \dfrac{V_x - V_1}{10} + \dfrac{V_x - V_2}{20} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = \left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{80}\right)V_1 - \dfrac{1}{10}V_x \\ I_2 = \left(\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{80}\right)V_2 - \dfrac{1}{20}V_x \\ V_x\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{20}\right) = \dfrac{1}{10}V_1 + \dfrac{1}{20}V_2 \rightarrow V_x\left(\dfrac{2+1+1}{\cancel{20}}\right) = \dfrac{2}{\cancel{20}}V_1 + \dfrac{1}{\cancel{20}}V_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow V_x = \frac{2}{4}V_1 + \frac{1}{4}V_2 \rightarrow \begin{cases} I_1 = \left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{80}\right)V_1 - \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{2}{4}V_1 + \dfrac{1}{4}V_2\right) = \dfrac{5}{80}V_1 - \dfrac{2}{80}V_2 \\ I_2 = \left(\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{80}\right)V_2 - \dfrac{1}{20}\left(\dfrac{2}{4}V_1 + \dfrac{1}{4}V_2\right) = -\dfrac{1}{40}V_1 + \dfrac{2}{40}V_2 \end{cases}$$

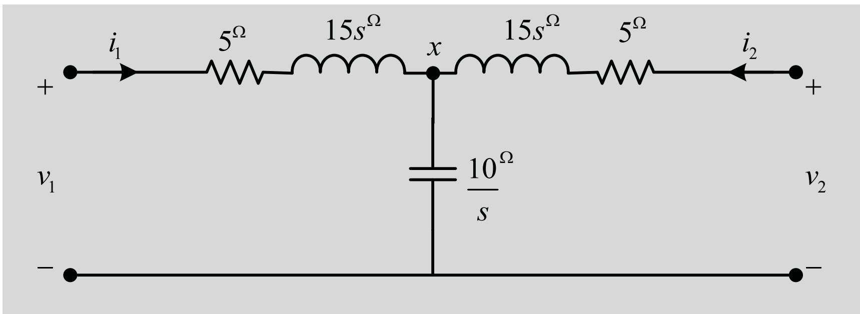
اکنون معادلات را به فرم معادلات ۵-۳ مرتب می کنیم:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{5}{80}V_1 - \dfrac{2}{80}V_2 \rightarrow V_1 = \dfrac{80}{5}I_1 + \dfrac{2}{5}V_2 \\ I_2 = -\dfrac{1}{40}V_1 + \dfrac{2}{40}V_2 = -\dfrac{1}{40}\left(16I_1 + 0.4V_2\right) + \dfrac{2}{40}V_2 = \dfrac{-16}{40}I_1 + \dfrac{2}{40}V_2 = -0.4I_1 + 0.04V_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow H = \begin{pmatrix} 16 & 0.4 \\ -0.4 & 0.09 \end{pmatrix}$$

◀ مثال ۵-۴:

پارامترهای H شبکه زیر را محاسبه نمایید:



حل:

برای بدست آوردن معادلات سرها در گره x معادلات گره را می نویسیم:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1 - V_x}{5+15s} \\ I_2 = \dfrac{V_2 - V_x}{5+15s} \\ I_1 + I_2 = \dfrac{V_x}{\frac{10}{s}} \to V_x = \dfrac{10}{s}\left(I_1 + I_2\right) \end{cases} \to \begin{cases} \left(5+15s\right) I_1 = V_1 - \dfrac{10}{s}\left(I_1 + I_2\right) \\ \left(5+15s\right) I_2 = V_2 - \dfrac{10}{s}\left(I_1 + I_2\right) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} V_1 = \left(5+15s+\dfrac{10}{s}\right) I_1 + \dfrac{10}{s} I_2 \\ I_2 = \dfrac{1}{\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} V_2 - \dfrac{10}{s\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} I_1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} V_1 = \left(5+15s+\dfrac{10}{s}\right) I_1 + \dfrac{10}{s}\left(\dfrac{1}{\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} V_2 - \dfrac{10}{s\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} I_1\right) \\ I_2 = \dfrac{1}{\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} V_2 - \dfrac{10}{s\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} I_1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} V_1 = \left(5+15s+\dfrac{10}{s} - \dfrac{100}{s^2\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)}\right) I_1 + \dfrac{10}{s}\dfrac{1}{\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} V_2 \\ I_2 = -\dfrac{10}{s\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} I_1 + \dfrac{1}{\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} V_2 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{s^2\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)\left(5+15s\right) + 10s\left(5+15s+\frac{10}{s}\right) - 100}{s^2\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)}\right) I_1 + \dfrac{10}{s}\dfrac{1}{\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} V_2 \\ I_2 = -\dfrac{10}{s\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} I_1 + \dfrac{1}{\left(5+15s+\frac{10}{s}\right)} V_2 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{225s^3 + 150s^2 + 325s + 100}{15s^2 + 5s + 10}\right) I_1 + \dfrac{10}{15s^2 + 5s + 10} V_2 \\ I_2 = -\dfrac{10}{15s^2 + 5s + 10} I_1 + \dfrac{s}{15s^2 + 5s + 10} V_2 \end{cases}$$

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{225s^3+150s^2+325s\ \ +100}{15s^2+5s+10} & \dfrac{10}{15s^2+5s+10}\\ -\dfrac{10}{15s^2+5s+10} & \dfrac{s}{15s^2+5s+10}\end{pmatrix}$$

۷-

۸-

۸-۱-

۸-۲-

۵-۳- اتصال دو قطبی ها:

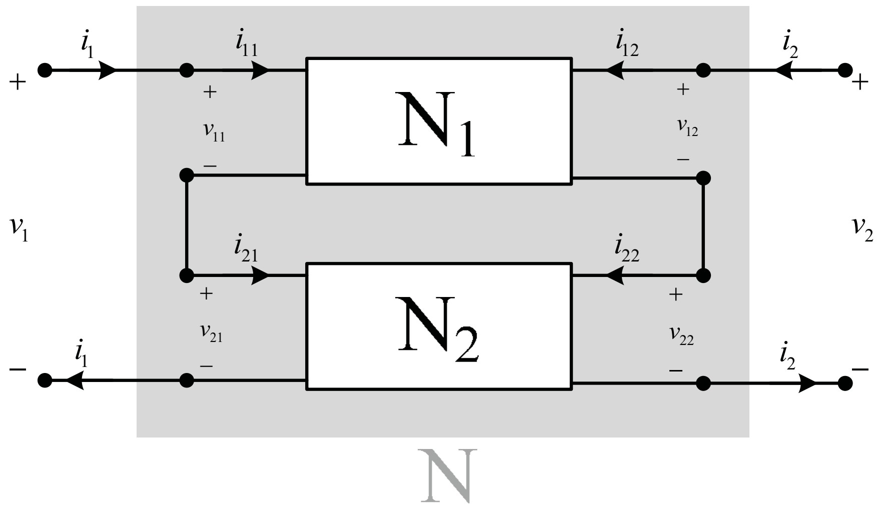
به چهار[۱] روش می توان دو قطبی ها را به یکدیگر متصل نمود:

۱- اتصال سری
۲- اتصال موازی
۳- اتصال سری – موازی
۴- اتصال موازی – سری

در این بخش انواع این اتصالات را بررسی می کنیم:

۵-۳-۱- اتصال سری:

اتصال سری یعنی هم ورودی و هم خروجی شبکه ها بصورت سری به یکدیگر متصل گردند. نحوه این اتصال به صورت زیر است:



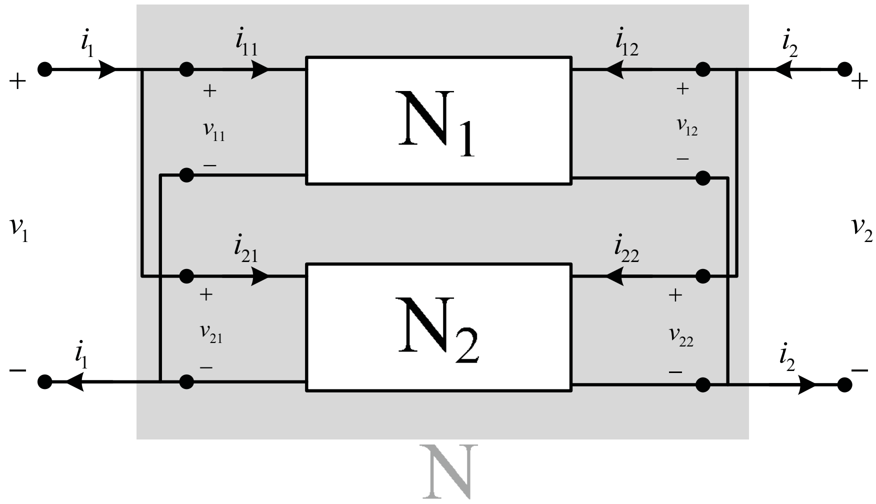
[۱] اتصال متوالی در این جزوه بررسی نخواهد شد.

در اتصال سری داریم:

$$\begin{cases} Z = Z_1 + Z_2 \\ i_1 = i_{11} = i_{21} \\ i_2 = i_{12} = i_{22} \\ v_1 = v_{11} + v_{12} \\ v_2 = v_{21} + v_{22} \end{cases}$$

۵-۳-۲- اتصال موازی:

اتصال موازی یعنی هم ورودی و هم خروجی شبکه ها بصورت موازی به یکدیگر متصل گردند. نحوه این اتصال به صورت زیر است:

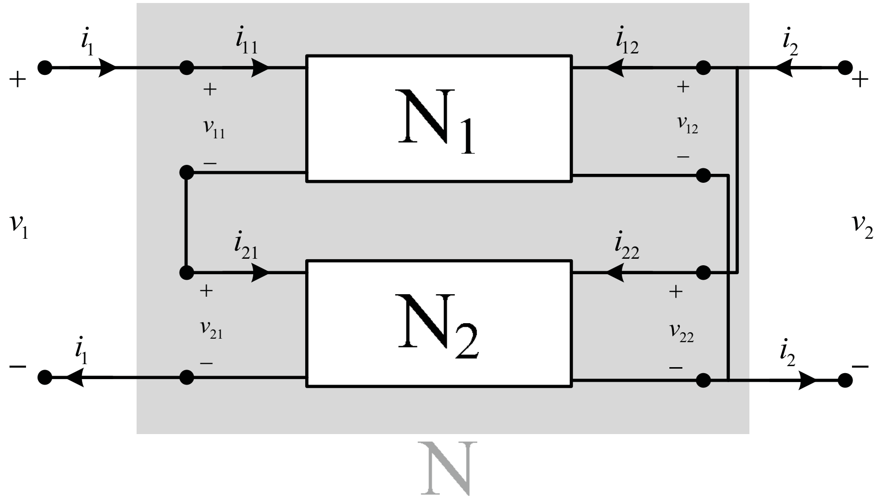


در اتصال موازی داریم:

$$\begin{cases} Y = Y_1 + Y_2 \\ i_1 = i_{11} + i_{21} \\ i_2 = i_{12} + i_{22} \\ v_1 = v_{11} = v_{12} \\ v_2 = v_{21} = v_{22} \end{cases}$$

۵-۳-۳- اتصال سری - موازی:

اتصال سری- موازی یعنی ورودی بصورت سری و خروجی بصورت موازی به یکدیگر متصل گردند. نحوه این اتصال به صورت زیر است:



در اتصال سری- موازی داریم:

$$\begin{cases} H = H_1 + H_2 \\ i_1 = i_{11} = i_{21} \\ i_2 = i_{12} + i_{22} \\ v_1 = v_{11} + v_{12} \\ v_2 = v_{21} = v_{22} \end{cases}$$

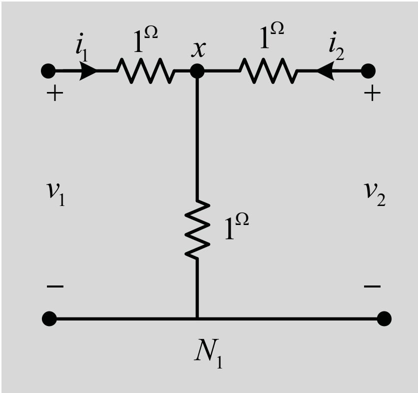
۵-۳-۳- اتصال موازی - سری:

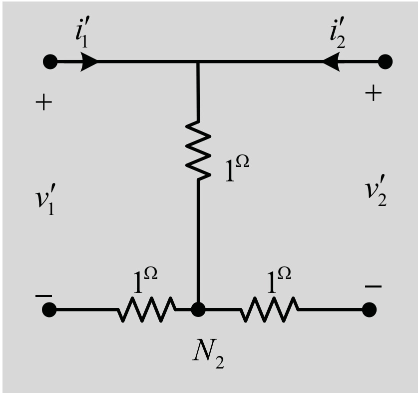
اتصال موازی - سری یعنی ورودی بصورت موازی و خروجی بصورت سری به یکدیگر متصل گردند. نحوه این اتصال به صورت عکس حالت فوق است و داریم:

$$\begin{cases} H^{-1} = H_1^{-1} + H_2^{-1} \\ i_1 = i_{11} + i_{21} \\ i_2 = i_{12} = i_{22} \\ v_1 = v_{11} = v_{12} \\ v_2 = v_{21} + v_{22} \end{cases}$$

مثال ۵-۵:

اتصالات سری، موازی و سری – موازی دو شبکه مقاومتی زیر را رسم نمایید و در هر حالت ماتریس ضرایب مربوطه را محاسبه نمایید:





حل:

هر دو شبکه یکسان هستند بنابراین ابتدا برای یک شبکه هر سه ماتریس امپدانس، ادمیتانس و هیبرید را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1 - V_x}{1} \\ I_2 = \dfrac{V_2 - V_x}{1} \\ \dfrac{V_x}{1} + \dfrac{V_x - V_1}{1} + \dfrac{V_x - V_2}{1} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = V_1 - V_x \\ I_2 = V_2 - V_x \\ 3V_x = V_1 + V_2 \rightarrow V_x = \dfrac{1}{3}V_1 + \dfrac{1}{3}V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = V_1 - \left(\dfrac{1}{3}V_1 + \dfrac{1}{3}V_2\right) \\ I_2 = V_2 - \left(\dfrac{1}{3}V_1 + \dfrac{1}{3}V_2\right) \end{cases}$$

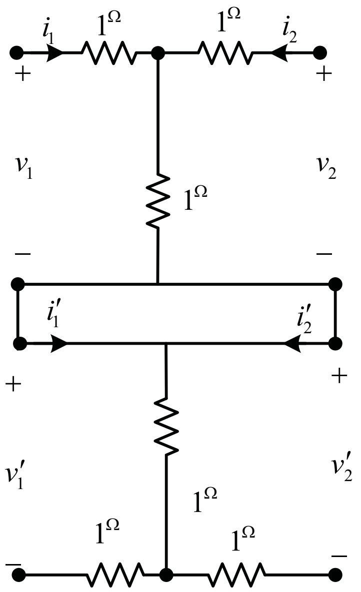
$$\rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{2}{3}V_1 - \dfrac{1}{3}V_2 \\ I_2 = -\dfrac{1}{3}V_1 + \dfrac{2}{3}V_2 \end{cases} \rightarrow Y_1 = Y_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

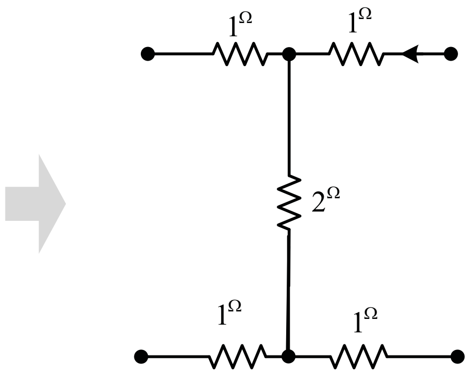
$$\rightarrow Z_1 = Z_2 = Y^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9}} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{2}{3}V_1 - \dfrac{1}{3}V_2 \rightarrow V_1 = \dfrac{3}{2}I_1 + \dfrac{1}{2}V_2 \\ I_2 = -\dfrac{1}{3}V_1 + \dfrac{2}{3}V_2 = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}I_1 + \dfrac{1}{2}V_2\right) + \dfrac{2}{3}V_2 = -\dfrac{1}{2}I_1 + \dfrac{1}{2}V_2 \end{cases} \rightarrow H_1 = H_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

اتصال سری:

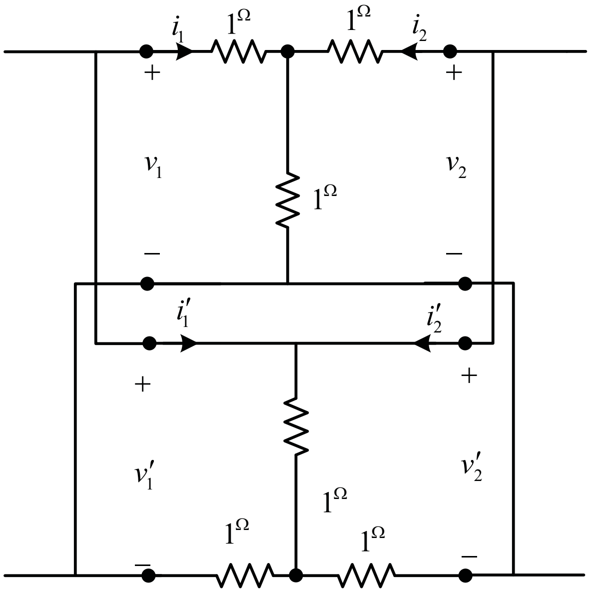
$$Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$





اتصال موازی:

$$Y=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$



اتصال سری - موازی:

$$H=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$