یاد آوری مدارهای الکتریکی ۱

در این فصل چندین قضیه اساسی و مهم مدارهای الکتریکی را بصورت خلاصه مرور می کنیم. قضایای اصلی تحلیل مدار عبارتند از:

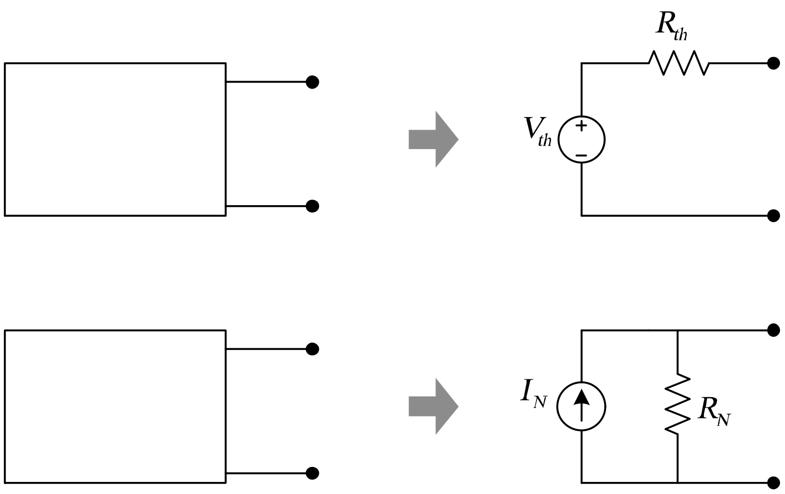
- قضیه مدار معادل تونن و نورتن
- قضیه جمع آثار
- قضیه هم پاسخی
- قضیه تلگان

اکنون به بررسی این چهار قضیه اصلی می پردازیم:

۲-

۴-۱ - قضیه مدار معادل تونن و نورتن:

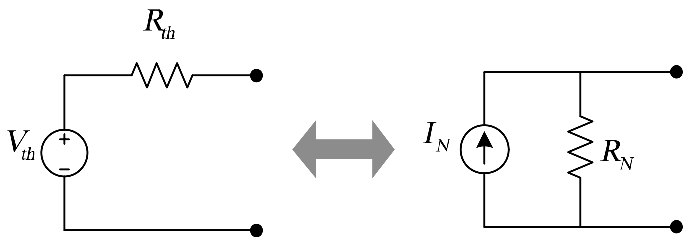
هر مدار خطی (که در اینجا آن را با یک شبکه خطی به نام N نشان می دهیم.) را در هر دو سر دلخواه می توان با یک منبع ولتاژ سری با مقاومت (مدار معادل تونن) و یا منبع جریان موازی با مقاومت (مدار معادل نورتن) جایگزین نمود.



شکل ۴-۱: الف) مدار معادل تونن ب) مدار معادل نورتن

نکته:

با استفاده از روش تبدیل منبع می توان مدارهای معادل تونن و نورتن را به یکدیگر تبدیل نمود.



$$\begin{cases} I_N = \dfrac{V_{th}}{R_{th}} \\ R_N = R_{th} \end{cases}$$

شکل ۴-۲: تبدیل دو طرفه مدار معادل تونن به مدار معادل نورتن

نکته:

در مدارهای شامل سلف و خازن، مقاومت تونن/ نورتن با امپدانس تونن/ نورتن جایگزین می شود.

یادآوری:

برای محاسبه مقادیر مدار معادل تونن بصورت زیر عمل می کنیم:

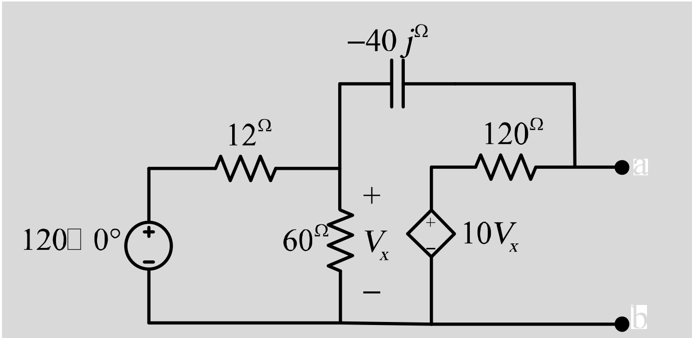
- اگر مدار شامل منابع وابسته **نباشد**، برای محاسبه مقاومت معادل تونن دیده شده از سر های a و b، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس مقاومت دیده شده از سرهای مورد نظر برابر مقاومت معادل تونن خواهد بود.
- اگر مدار شامل منابع وابسته **باشد**، برای محاسبه مقاومت معادل تونن دیده شده از سر های a و b، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس به سرهای مورد نظر یک منبع ولتاژ تست (V_t) با جریان تست (I_t) متصل می‌کنیم. مقاومت تونن برابر نسبت $\frac{V_t}{I_t}$ خواهد بود.
- برای محاسبه ولتاژ تونن (V_{th}) ابتدا سر های a و b را مدار باز کرده (اگر بخواهیم مدار معادل تونن دو سر المانی را محاسبه کنیم، شاخه مربوط به آن را در مدار، مدار باز می کنیم.) سپس به سرهای مورد نظر ولتاژ V_{th} را اختصاص داده و مدار را بر حسب V_{th} تحلیل می کنیم.

برای محاسبه مقادیر مدار معادل نورتن بصورت زیر عمل می کنیم:

- اگر مدار شامل منابع وابسته **نباشد**، برای محاسبه مقاومت معادل نورتن دیده شده از سر های a و b، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس مقاومت دیده شده از سرهای مورد نظر برابر مقاومت معادل نورتن خواهد بود.
- اگر مدار شامل منابع وابسته **باشد**، برای محاسبه مقاومت معادل نورتن دیده شده از سر های a و b، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس به سرهای مورد نظر یک منبع ولتاژ تست (V_t) با جریان تست (I_t) متصل می‌کنیم. مقاومت نورتن برابر نسبت $\frac{V_t}{I_t}$ خواهد بود.
- برای محاسبه جریان نورتن (I_N) ابتدا سر های a و b را اتصال کوتاه کرده (اگر بخواهیم مدار معادل نورتن دو سر المانی را محاسبه کنیم، شاخه مربوط به آن را در مدار، اتصال کوتاه می کنیم.) سپس به شاخه اتصال کوتاه شده جریان I_N را اختصاص داده و مدار را بر حسب I_N تحلیل می کنیم.

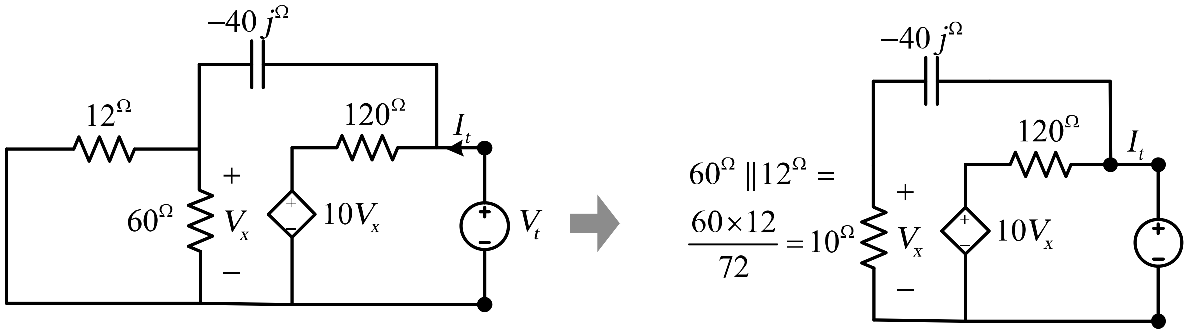
مثال ۴-۱:

مدار معادل تونن دیده شده از سرهای a و b را در مدار شکل زیر محاسبه نمایید.



حل:

از آنجا که در این مدار منبع وابسته وجود دارد، برای محاسبه امپدانس تونن، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس به سرهای a و b یک منبع ولتاژ تست (V_t) با جریان تست (I_t) متصل می‌کنیم. امپدانس تونن برابر نسبت $\dfrac{V_t}{I_t}$ خواهد بود:

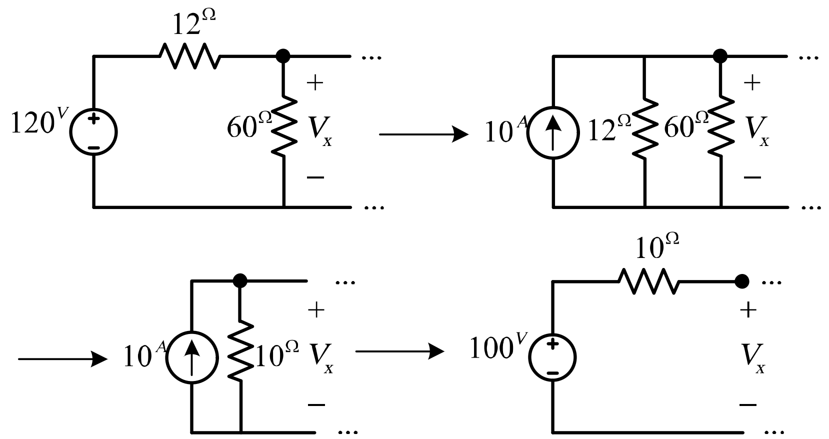


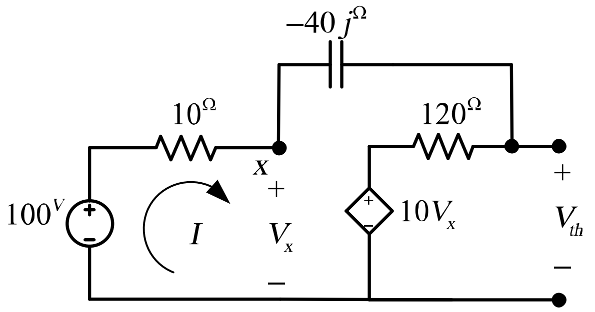
با نوشتن معادله گره a داریم:

$$\begin{cases} I_t = \dfrac{V_t - 10V_x}{120} + \dfrac{V_t}{10-40j} \\ V_x = \dfrac{10}{10-40j} V_t \end{cases} \rightarrow I_t = V_t\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{10-40j}\right) - \frac{10}{120}V_x = V_t\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{10-40j}\right) - \frac{10}{120}\left(\frac{10}{10-40j}V_t\right)$$

$$\rightarrow I_t = \left(\frac{10-40j+120-100}{120(10-40j)}\right)V_t = \left(\frac{30-40j}{120(10-40j)}\right)V_t \rightarrow Z_{th} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{120(10-40j)}{30-40j} \cong 91.2 - 38.4j$$

برای محاسبه ولتاژ تونن (V_{th}) ابتدا سرهای a و b را مدار باز کرده، سپس به سرهای مورد نظر ولتاژ V_{th} را اختصاص می دهیم. سپس با تبدیل منبع داریم:





اکنون مدار را بر حسب V_{th} تحلیل می کنیم. با نوشتن معادله در حلقه نشان داده شده داریم:

$$-100+10I-(40j)I+120I+10V_x=0\rightarrow 100=(130-40j)I+10V_x$$

از طرفی:

$$V_x=100-10I$$

می باشد. بنابراین V_x بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$100=(130-40j)I+10(100-10I)=(130-40j-100)I+1000$$

$$\rightarrow -900=(30-40j)I$$

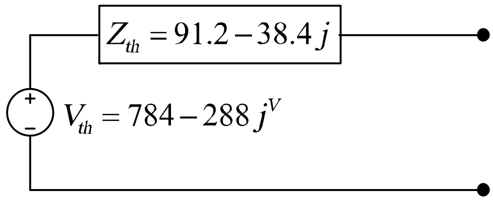
$$I=\frac{-900}{30-40j}=18\angle -126.87^\circ =$$

$$V_x=100-10I=208+144j$$

در نهایت داریم:

$$V_{Th}=10V_x+120I=784-288j$$

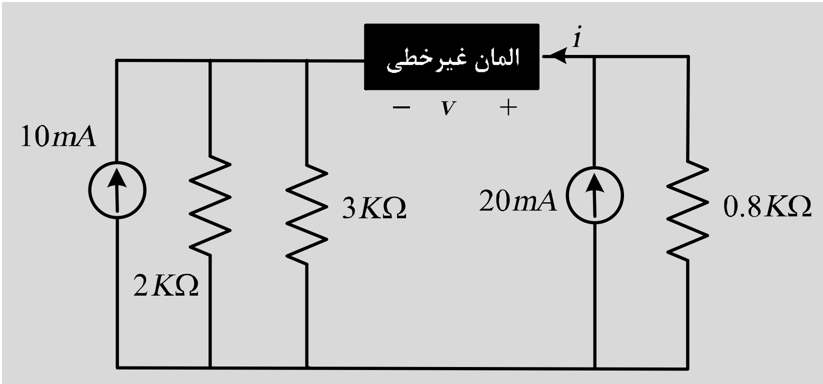
بنابراین مدار معادل تونن بصورت زیر خواهد بود:



یکی از کاربردهای مهم مدار معادل تونن/ نورتن، محاسبه ولتاژ و جریان المان های غیر خطی است که بخاطر خاصیت غیرخطی بودن آنها نمی توان روش های معمول مداری را برای آنها بکار برد. با بدست آوردن مدار معادل تونن/ نورتن دو سر آنها و نوشتن معادله KCL/KVL مربوطه می توان ولتاژ یا جریان المان مورد نظر را محاسبه نمود. به مثال زیر توجه کنید:

▶ **مثال ۴-۲:**

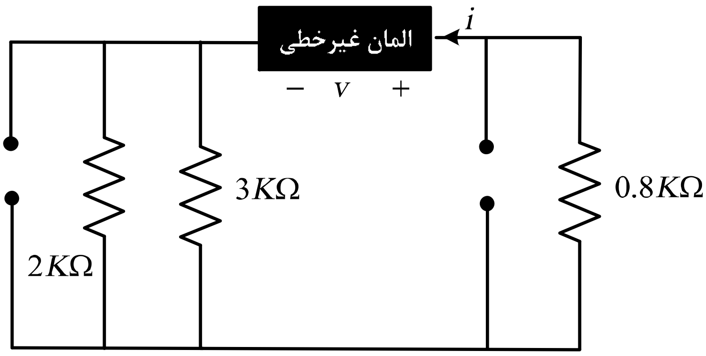
با استفاده از قضیه مدار معادل تونن، ولتاژ و جریان عنصر غیر خطی مدار زیر را محاسبه نمایید.



$$10i = 5(v^2 - 4v)$$

حل:

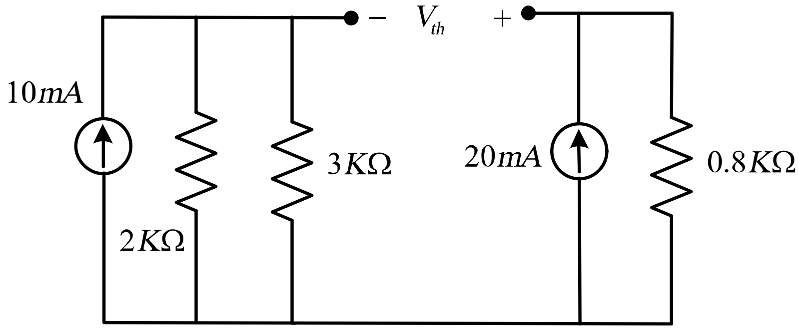
ابتدا مدار معادل تونن دو سر المان غیرخطی را محاسبه می کنیم. از آنجا که در این مدار منبع وابسته وجود ندارد، برای محاسبه امپدانس تونن، ابتدا تمام منابع مستقل را حذف می کنیم، سپس مقاومت دیده شده از سرهای مورد نظر برابر مقاومت معادل تونن خواهد بود:



با توجه به مدار ساده شده، مقاومت معادل دیده شده از سرهای المان غیرخطی، برابر است با:

$$R_{th} = (2\,||\,3) + 0.8 = \frac{2\times 3}{5} + 0.8 = 2^{\Omega}$$

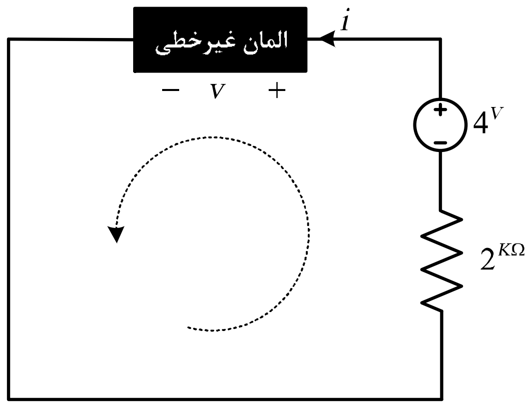
برای محاسبه ولتاژ تونن (V_{th}) ابتدا سرهای a و b را مدار باز کرده، سپس به سرهای مورد نظر ولتاژ V_{th} را اختصاص می دهیم:



اکنون مدار را بر حسب V_{th} تحلیل می کنیم:

$$\begin{cases} V_a = 20\times 0.8 = 16 \\ V_b = 10\times\left(2\parallel 3\right) = 12 \end{cases} \rightarrow V_{th} = V_a - V_b = 4^V$$

بنابراین مدار معادل تونن بصورت زیر خواهد بود:



بنابراین:

$$2i-4+v=0 \rightarrow i=\frac{4-v}{2} \rightarrow \begin{cases} i=\dfrac{4-v}{2} \\ 10i=5(v^2-4v) \end{cases}$$

$$\rightarrow 10\left(\frac{4-v}{2}\right)=5(v^2-4v) \rightarrow 5\left(4-v\right)=-5v\left(4-v\right) \rightarrow \begin{cases} v=-1 \\ v=4 \end{cases}$$

۴-۲- قضیه جمع آثار:

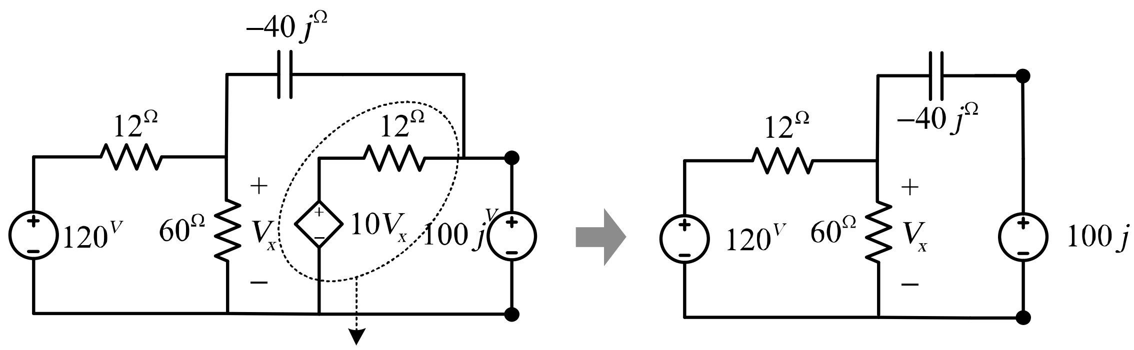
برای هر شبکه خطی با چندین ورودی، پاسخ کامل برابر جمع پاسخ های مدار به تک تک ورودی ها (منابع مستقل) می باشد. با یک مثال این قضیه مهم را یادآوری می کنیم:

مثال ۴-۳:

اگر به مدار مثال ۴-۱ در سرهای a و b یک منبع ولتاژ $100j$ متصل گردد، ولتاژ مقاومت 60^Ω را به روش جمع آثار محاسبه نمایید.

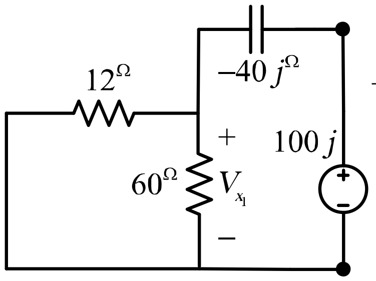
حل:

مدار مثال ۴-۱ با حضور منبع $100j$ بصورت زیر خواهد بود:



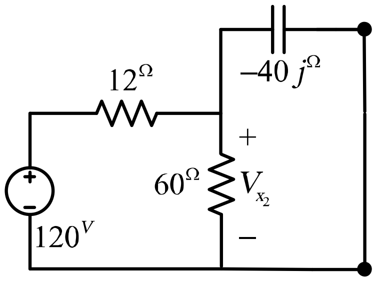
اکنون مدار دارای دو منبع ورودی است به روش جمع آثار هر بار یکی از منابع را حذف نموده و پاسخ مدار را به حضور تک منبع بررسی می کنیم:

۱- حذف منبع 120^V:



$$\to V_{x_1}=\frac{(60\,\|\,12)}{(60\,\|\,12)-40\,j}\times 100\,j$$
$$=\frac{10}{10-40\,j}\times 100\,j$$
$$=-23.5294+5.8824j$$

۲- حذف منبع $100\,j^V$:



$$\to V_{x_2}=\frac{(60\,\|\,-40\,j)}{(60\,\|\,-40\,j)+12}\times 120$$
$$=94.11-23.52\,j$$

بنابراین ولتاژ خروجی برابر است با:

$$V_x=V_{x_1}+V_{x_2}=70.61-17.64\,j$$

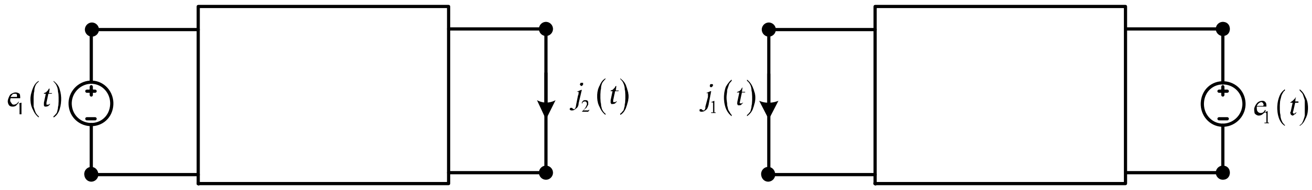
۴-۳- قضیه هم پاسخی:

برای یک شبکه خطی و تغییر ناپذیر با زمان، بدون حضور منابع وابسته و مستقل سه بیان زیر به نام قضیه هم پاسخی برقرار است:

بیان اول قضیه هم پاسخی:

منبع ولتاژ $e_1(t)$ را به سرهای a و b متصل کرده و پاسخ جریان حالت صفر $j_2(t)$ را که از اتصال کوتاه کردن سرهای c و d بدست می آید محاسبه می کنیم. سپس همان منبع $e_1(t)$ را به سرهای c و d متصل نموده و جریان حالت صفر $j_1(t)$ را که از اتصال کوتاه کردن سرهای a و b بدست می آید محاسبه می کنیم. قضیه هم پاسخی بیان می دارد که توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه هر چه باشد، همواره خواهیم داشت:

$$j_1(t)=j_2(t)$$



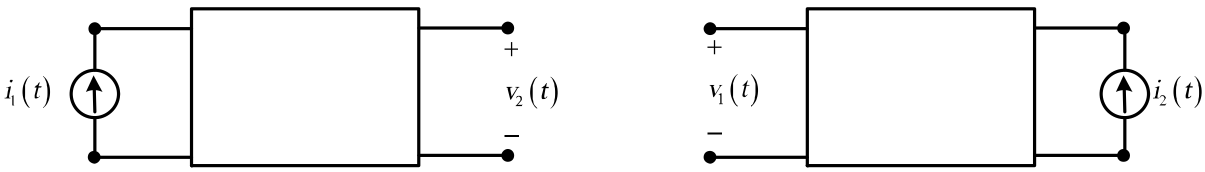
$$j_1(t) = j_2(t)$$

شکل ۴-۳: بیان اول قضیه هم پاسخی

بیان دوم قضیه هم پاسخی:

منبع جریان $i_1(t)$ را به سرهای a و b متصل کرده و پاسخ ولتاژ حالت صفر $v_2(t)$ را که از مدار باز کردن سرهای c و d بدست می آید محاسبه می کنیم. سپس همان منبع $i_1(t)$ را به سرهای c و d متصل نموده و پاسخ ولتاژ حالت صفر $v_1(t)$ را که از مدار باز کردن سرهای a و b بدست می آید محاسبه می کنیم. قضیه هم پاسخی بیان می دارد که توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه هر چه باشد، همواره خواهیم داشت:

$$v_1(t) = v_2(t)$$



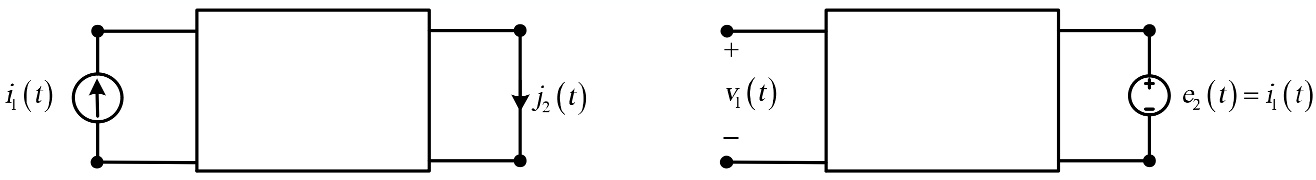
$$v_1(t) = v_2(t)$$

شکل ۴-۴: بیان دوم قضیه هم پاسخی

بیان سوم قضیه هم پاسخی:

منبع جریان $i_1(t)$ را به سرهای a و b متصل کرده و پاسخ جریان حالت صفر $j_2(t)$ را که از اتصال کوتاه کردن سرهای c و d بدست می آید محاسبه می کنیم. سپس منبع $e_2(t) = i_1(t)$ را به سرهای c و d متصل نموده و پاسخ ولتاژ حالت صفر $v_1(t)$ را که از مدار باز کردن سرهای a و b بدست می آید محاسبه می کنیم. قضیه هم پاسخی بیان می دارد که توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه هر چه باشد، همواره خواهیم داشت:

$$v_1(t) = j_2(t)$$

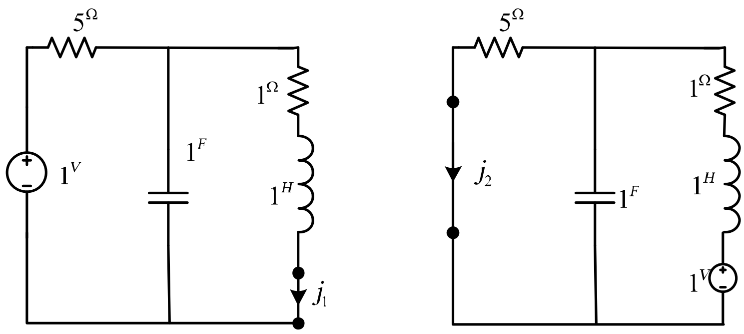


$v_1(t) = j_2(t)$

شکل ۴-۵: بیان سوم قضیه هم پاسخی

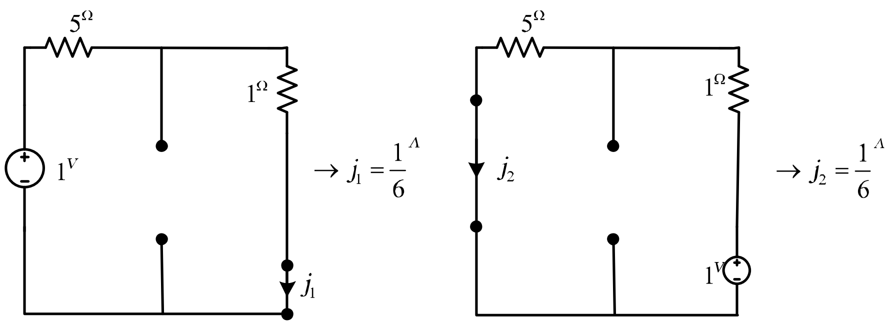
◄ مثال ۴-۴:

الف) برای مدارهای شکل زیر نشان دهید که $j_1 = j_2$.

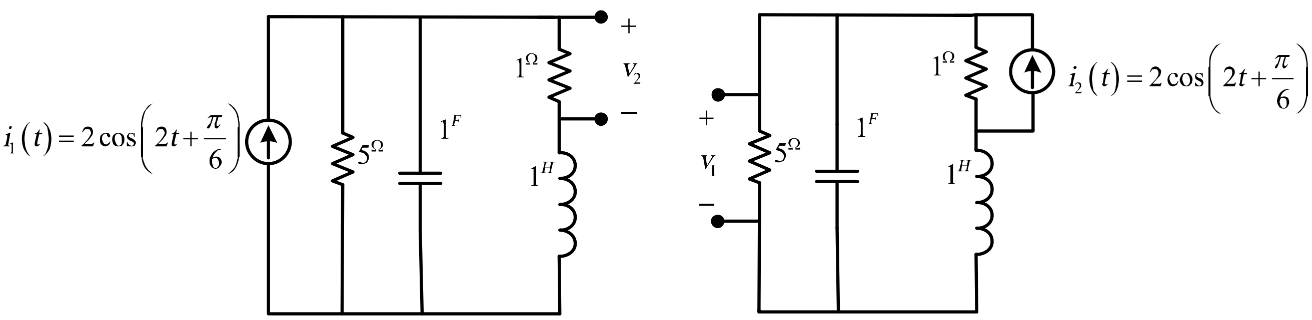


حل:

اگر منبع ولتاژ را بعنوان ورودی مدار های فوق در نظر بگیریم، مابقی مدار یک شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود. بنابراین شرایط بیان ۱ قضیه هم پاسخی بر قرار خواهد بود. حضور منابع DC در مدارهایی که شامل سلف و خازن هستند سبب می شود که سلف اتصال کوتاه شده و خازن مدار باز شود:

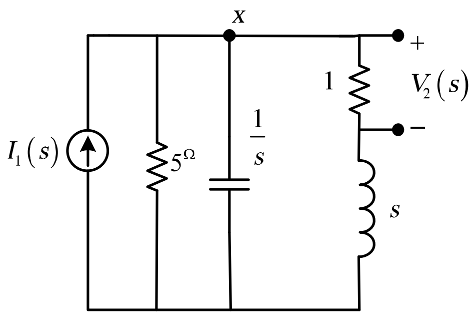


ب) برای مدارهای شکل زیر نشان دهید که $v_1 = v_2$.



اگر منبع جریان را بعنوان ورودی مدار های فوق در نظر بگیریم، مابقی مدار یک شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود. بنابراین

شرایط بیان ۲ قضیه هم پاسخی بر قرار خواهد بود. ورودی مدارها سینوسی است بنابراین برای محاسبه پاسخ حالت دائمی سینوسی ابتدا مدار را به حوزه لاپلاس منتقل نموده و سپس پاسخ را محاسبه می کنیم:



$$\begin{cases} I_1(s)=\dfrac{V_x(s)}{5}+\dfrac{V_x(s)}{\frac{1}{s}}+\dfrac{V_x(s)}{1+s}=V_x(s)\left(\dfrac{1}{5}+s+\dfrac{1}{1+s}\right) \\ V_2(s)=\left(\dfrac{1}{1+s}\right)V_x(s)\rightarrow V_x(s)=(s+1)V_2(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1(s)=(s+1)\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{1+s}\right)V_2(s)=\cancel{(s+1)}\left(\frac{(s+1)+5s(s+1)+5}{5\cancel{(s+1)}}\right)V_2(s)$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{V_2(s)}{I_1(s)}=\frac{5}{5s^2+6s+6}$$

بنابراین:

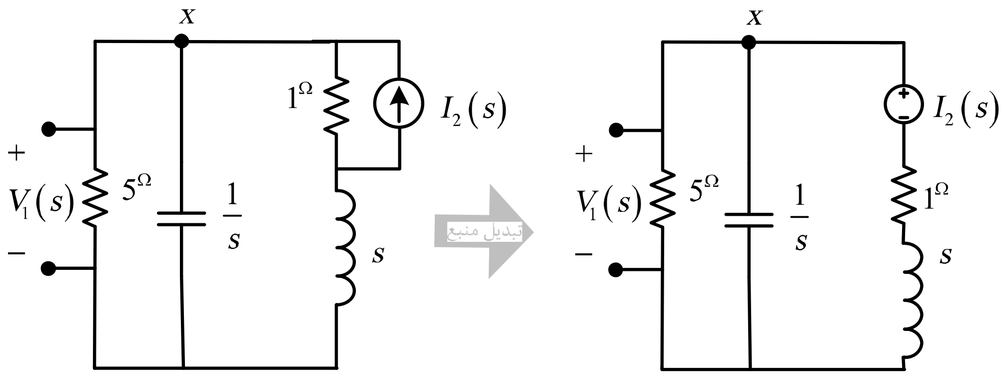
$$i_1(t)=2\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow\begin{cases}A=2\\ \omega=2\\ \theta=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$H(s)=\frac{5}{5s^2+6s+6}\rightarrow H(j2)=\frac{5}{5(j2)^2+6(j2)+6}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\left|H(j2)\right|=0.27\\ \angle H(j2)=-139°\end{cases}$$

$$\rightarrow v_1(t)=2\times 0.27\cos(2t+30°-139°)=0.54\cos(2t-109°)$$

برای مدار دوم داریم:



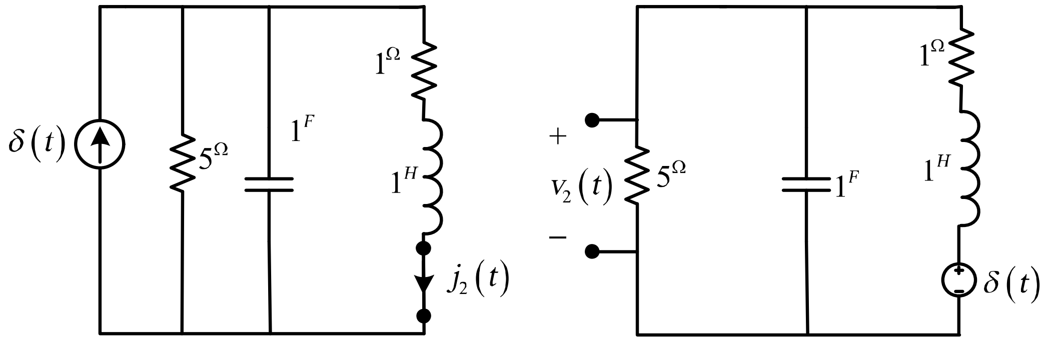
$$\frac{V_1(s)}{5}+\frac{V_1(s)}{\frac{1}{s}}+\frac{V_1(s)-I_2(s)}{1+s}=0\rightarrow V_1(s)\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{s+1}\right)=\left(\frac{1}{s+1}\right)I_2(s)$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{V_1(s)}{I_2(s)}=\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{1}{5}+s+\frac{1}{s+1}}=\frac{5}{5s^2+6s+6}$$

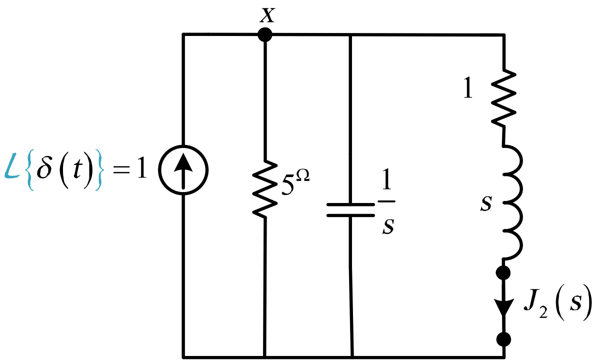
تابع تبدیل و ورودی مدارها یکسان است بنابراین داریم:

$$\rightarrow v_1(t)=2\cos(2t-109°)$$

ج) برای مدارهای شکل زیر نشان دهید که $v_1 = j_2$.



اگر منبع جریان و ولتاژ را بعنوان ورودی مدار های فوق در نظر بگیریم، مابقی مدار یک شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود. بنابراین شرایط بیان ۳ قضیه هم پاسخی بر قرار خواهد بود. ورودی مدارها سینوسی است بنابراین برای محاسبه پاسخ حالت دائمی سینوسی ابتدا مدار را به حوزه لاپلاس منتقل نموده و سپس پاسخ را محاسبه می کنیم:



$$1=\frac{V_x(s)}{5}+\frac{V_x(s)}{\frac{1}{s}}+\frac{V_x(s)}{1+s}\rightarrow V_x(s)\left(\frac{1}{s}+s+\frac{1}{s+1}\right)=1$$

$$\rightarrow V_x(s)=\frac{1}{\left(\frac{1}{s}+s+\frac{1}{s+1}\right)}=\frac{5(s+1)}{5s^2+6s+6}$$

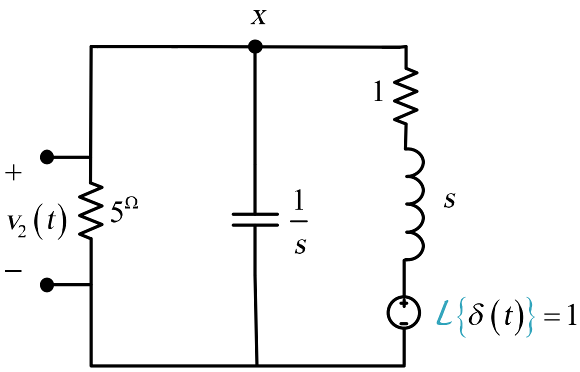
$$\rightarrow J_2(s)=\frac{V_x(s)}{1+s}=\frac{5}{5s^2+6s+6}$$

$$\rightarrow J_2(s)=\frac{5}{5s^2+6s+6}=\frac{1}{s^2+1.2s+1.2}=\frac{1}{(s+0.6)^2+(0.92)^2}=\frac{1}{0.92}\times\frac{0.92}{(s+0.6)^2+(0.92)^2}$$

$$s^2+1.2s+1.2=s^2+2\times 0.6s+0.6^2+\left(\underbrace{1.2-0.6^2}_{=0.84}\right)=s^2+2\times 0.6s+0.6^2+0.92^2=(s+0.6)^2+(0.92)^2$$

$$j_2(t)=1.09e^{-0.6t}\sin(0.92t)u(t)$$

برای مدار دوم داریم:



$$\frac{V_2(s)}{5}+\frac{V_2(s)}{\frac{1}{s}}+\frac{V_2(s)-1}{1+s}\rightarrow V_2(s)\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{s+1}$$

$$\rightarrow V_2(s)=\frac{\frac{1}{s+1}}{\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{s+1}\right)}=\frac{5}{5s^2+6s+6}$$

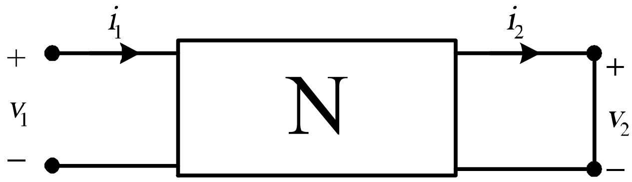
$$v_2(t)=1.09e^{-0.6t}\sin(0.92t)u(t)$$

نکته:

نتیجه مهم قضیه هم پاسخی اینست که برای شبکه های خطی تغییرناپذیر با زمان، تابع تبدیل شبکه ثابت است و به جنس سیگنال ورودی و یا جایگاه آن بستگی ندارد.

مثال ۴-۵:

در آزمایش انجام شده بر روی شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان N نتایج زیر حاصل شده است.



$$v_1(t)=\delta(t)\ ^{V}\!\rightarrow i_2(t)=(1-e^{-2t}-te^{-2t})u(t)\ ^{A}$$

ولتاژ ورودی این شبکه را به ازای $v_2(t)=20\sin(2t-90)\,V$ محاسبه نمایید.

حل:

شبکه داده شده در شرایط قضیه هم پاسخی صدق می کند. بر طبق بیان سوم قضیه هم پاسخی، اگر تابع تبدیل مدار در دسترس باشد، با داشتن ورودی $v_2(t)=20\sin(2t-90)\,V$ می توان خروجی $v_1(t)$ را محاسبه نمود. برای محاسبه تابع تبدیل شبکه از ورودی – خروجی داده شده استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} v_1(t)=\delta(t)\ ^{V}\!\rightarrow V_1(s)=1 \\ i_2(t)=(1-e^{-2t}-te^{-2t})u(t)\ ^{A}\!\rightarrow I_2(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{(s+2)^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{I_2(s)}{V_1(s)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}=\frac{(s+2)^2-s(s+2)-s}{s(s+2)^2}=\frac{\cancel{s^2}+4s+4-\cancel{s^2}-2s-s}{s(s+2)^2}=\frac{s+4}{s(s+2)^2}$$

$$\rightarrow H(s)=\frac{V_1(s)}{V_2(s)}=\frac{s+4}{s(s+2)^2}$$

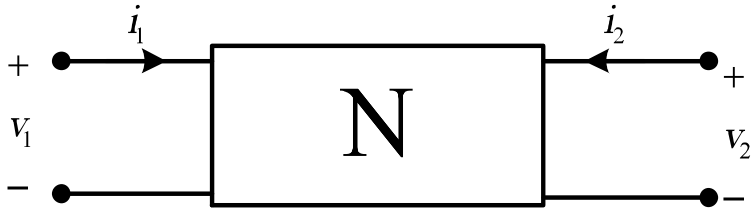
$$v_2(t)=20\sin(2t-90)=20\cos(2t)\rightarrow\begin{cases}A=20\\ \omega=2\\ \theta=0^\circ\end{cases}$$

$$H(s)=\frac{s+4}{s(s+2)^2}\rightarrow H(j2)=\frac{(j2)+4}{(j2)((j2)+2)^2}=-0.25-0.125j\rightarrow\begin{cases}|H(j2)|=0.28\\ \angle H(j2)=-153.5^\circ\end{cases}$$

$$\rightarrow v_1(t)=20\times0.28\cos(2t-153.5^\circ)=5.6\cos(2t-153.5^\circ)$$

مثال ۴-۶:

در آزمایش انجام شده بر روی شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان N نتایج زیر حاصل شده است.



$$v_1(t)=u(t)\,V \to v_2(t)=(1-e^{-3t}-te^{-3t})u(t)\,V$$

ولتاژ ورودی این شبکه را به ازای $i_2(t)=50\cos(t)\,V$ محاسبه نمایید.

حل:

شبکه داده شده در شرایط قضیه هم پاسخی صدق می کند. بر طبق بیان سوم قضیه هم پاسخی، اگر تابع تبدیل مدار در دسترس باشد، با داشتن ورودی $i_2(t)=50\cos(t)\,V$ می توان خروجی $v_1(t)$ را محاسبه نمود. برای محاسبه تابع تبدیل شبکه از ورودی – خروجی داده شده استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} v_1(t)=u(t)\ ^{V}\!\!\to V_1(s)=\dfrac{1}{s} \\ v_2(t)=(1-e^{-2t}-te^{-2t})u(t)\ ^{A}\!\!\to V_2(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{1}{(s+3)^2} \end{cases}$$

$$\to H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{(s+2)^2}}{\dfrac{1}{s}}=\frac{\dfrac{(s+3)^2-s(s+3)-s}{\cancel{s}(3+2)^2}}{\cancel{\dfrac{1}{s}}}=\frac{\cancel{s^2}+6s+9\cancel{-s^2}-3s-s}{(s+3)^2}=\frac{2s+9}{(s+3)^2}$$

$$\to H(s)=\frac{V_1(s)}{V_2(s)}=\frac{2s+9}{(s+3)^2}$$

$$i_2(t)=50\cos(t)\to\begin{cases} A=50 \\ \omega=1 \\ \theta=0^\circ \end{cases}$$

$$H(s)=\frac{2s+9}{(s+3)^2}\to H(j)=\frac{2j+9}{(j+3)^2}=0.84-0.38j$$

$$\to\begin{cases} |H(j)|=0.92 \\ \angle H(j)=-24.34^\circ \end{cases}$$

$$\to v_1(t)=0.92\times 50\cos(t-24.347^\circ)=46\cos(t-24.347^\circ)$$

۴-۴ - قضیه تلگان:

شبکه مداری فشرده ای دلخواهی را به گونه ای در نظر بگیرید که گراف مداری آن b شاخه و n_t گره داشته باشد. اگر ولتاژ و جریان شاخه kام این گراف را v_k و j_k نامگذاری کنیم، داریم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k\, j_k=0 \qquad ۱-۴$$

نکته:

نتیجه مهم قضیه تلگان، برقراری تعادل توان در شبکه های فشرده ایده آل است. یعنی توان تولیدی برابر توان مصرفی مدار است.

اگر v_k و j_k ولتاژ و جریان شاخه kام گراف مداری باشد که در قوانین جریان و ولتاژ کیرشف صدق می کنند، برای همان شاخه با ولتاژ و جریان دیگری نظیر $\hat{v}_k$ و $\hat{j}_k$ که در قوانین جریان و ولتاژ کیرشف صدق می کنند، داریم:

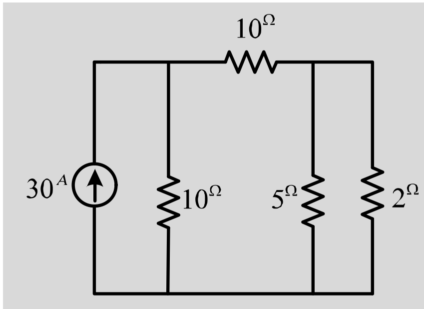
$$\sum_{k=1}^{b} v_k\,\hat{j}_k = 0 \qquad \text{۲-۴}$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k\,j_k = 0 \qquad \text{۳-۴}$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k\,\hat{j}_k = 0 \qquad \text{۴-۴}$$

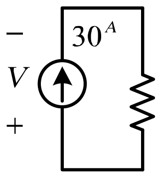
◄ مثال ۴-۷:

با استفاده از قضیه تلگان، تعادل توان را در مدار زیر بررسی کنید:



حل:

با ساده سازی مدار داریم:



$$\big((2\parallel 5)+10\big)\parallel 10=\left(\frac{10}{7}+10\right)\parallel 10=\frac{80}{7}\parallel 10=\frac{\frac{80}{7}\times 10}{\frac{150}{7}}=\frac{80}{15}^{\Omega}$$

اکنون توان مقاومت و منبع بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$P_R=I_R^2R=(30)^2\times\frac{80}{15}=\frac{900\times 80}{15}=4800^{W}$$

$$\rightarrow V=I_RR=-30\times\frac{80}{15}$$

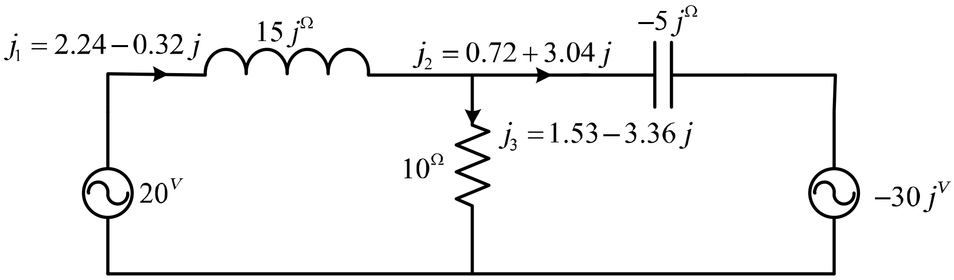
$$P_I=I.V=30\left(-30\times\frac{80}{15}\right)=-4800^{W}$$

بنابراین تعادل توان در مدار برقرار است.

◄ مثال ۴-۸:

با استفاده از قضیه تلگان، تعادل توان را در مدار مثال ۱-۹ بررسی کنید.

حل:



توان تک تک المان های مدار برابر است با:

$$P_{20^V} = 20\times\left(-\overline{j_1}\right) = 20\times\left(-2.24-0.32j\right) = -44-6.4j$$

$$P_{-30j^V} = \left(-30j\right)\times\overline{j_2} = \left(-30j\right)\left(0.72-3.04j\right) = -91.2-21.6j$$

$$P_{15j} = \left|j_1\right|^2\left(15j\right) = \left|\left(2.24-0.32j\right)\right|^2\left(15j\right) = 76.8j$$

$$P_{10} = \left|j_3\right|^2\left(10\right) = \left|\left(1.53-3.36j\right)\right|^2\left(10\right) = 136.305$$

$$P_{-5j} = \left|j_2\right|^2\left(-5j\right) = \left|\left(0.72+3.04j\right)\right|^2\left(-5j\right) = -48.8j$$

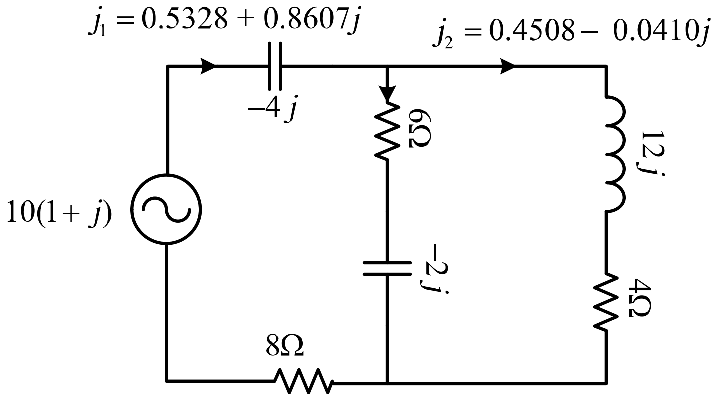
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} P_k &= P_{20^V} + P_{-30j^V} + P_{15j} + P_{10} + P_{15j}\\ &= \left(-44-6.4j\right)+\left(-91.2-21.6j\right)+\left(76.8j\right)+\left(136.305\right)+\left(-48.8j\right)\\ &\cong 0\end{aligned}$$

بنابراین تعادل توان در مدار برقرار است.

◄ مثال ۴-۹:

با استفاده از قضیه تلگان، تعادل توان را در مدار مثال ۱-۱۰ بررسی کنید.

حل:



ابتدا امپدانس معادل مدار را محاسبه می کنیم:

$$\left(8-4j\right)+\left(\left(6-2j\right)\|\left(4+12j\right)\right) = \left(8-4j\right)+\frac{\left(6-2j\right)\left(4+12j\right)}{\left(6-2j\right)+\left(4+12j\right)} = 13.6-3.2j$$

بنابراین داریم:

$$P_{10+10j} = \left(10+10j\right)\times\left(-\overline{j_1}\right) = \left(10+10j\right)\times\left(-0.5328+0.8607j\right) = -13.935+3.279j$$

$$P_{13.6-3.2j} = \left(13.6-3.2j\right)\times\left(\left|j_1\right|^2\right) = \left(13.6-3.2j\right)\left(\left|+0.5328+0.8607j\right|^2\right) = +13.935-3.279j$$

بنابراین تعادل توان در مدار برقرار است.

◀ مثال ۴-۱۰:

در یک شبکه RLC جریان و ولتاژ سه شاخه در فرکانس 50^{Hz} اندازه گیری شده اند. $\hat{V}_3$ را محاسبه نمایید.

$$\begin{cases} V_1 = 10\angle 20^\circ & I_1 = 2\angle 25^\circ \\ V_2 = 12\angle 35^\circ & I_2 = 10\angle -10^\circ \\ V_3 = 5\angle 15^\circ & I_3 = 14.93\angle 68^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{V}_1 = 5\angle 5^\circ & \hat{I}_1 = 12\angle 40^\circ \\ \hat{V}_2 = 15\angle -20^\circ & \hat{I}_2 = 8\angle 10^\circ \\ \hat{V}_3 = ? & \hat{I}_3 = 10\angle 15^\circ \end{cases}$$

حل:

طبق قضیه تلگان برای این سه شاخه داریم:

$$\begin{cases} V_1 = 10\angle 20^\circ & I_1 = 2\angle 25^\circ \\ V_2 = 12\angle 35^\circ & I_2 = 10\angle -10^\circ \\ V_3 = 5\angle 15^\circ & I_3 = 14.93\angle 68^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{V}_1 = 5\angle 5^\circ & \hat{I}_1 = 12\angle 40^\circ \\ \hat{V}_2 = 15\angle -20^\circ & \hat{I}_2 = 8\angle 10^\circ \\ \hat{V}_3 = ? & \hat{I}_3 = 10\angle 15^\circ \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{b} V_k \hat{I}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{V}_k I_k$$

$$\rightarrow V_1\hat{I}_1 + V_2\hat{I}_2 + V_3\hat{I}_3 + \cancel{\sum_{k=4}^{b} V_k\hat{I}_k} = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 + \hat{V}_3 I_3 + \cancel{\sum_{k=4}^{b} \hat{V}_k I_k}$$

$$\rightarrow V_1\hat{I}_1 + V_2\hat{I}_2 + V_3\hat{I}_3 = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 + \hat{V}_3 I_3$$

$$\rightarrow (10\angle 20^\circ)(12\angle 40^\circ) + (12\angle 35^\circ)(8\angle 10^\circ) + (5\angle 15^\circ)(10\angle 15^\circ)$$

$$= (5\angle 5^\circ)(2\angle 25^\circ) + (15\angle -20^\circ)(10\angle -10^\circ) + \left(\hat{V}_3\right)(14.93\angle 68^\circ)$$

$$\rightarrow (120\angle 60^\circ) + (96\angle 45^\circ) + (50\angle 30^\circ) = (10\angle 30^\circ) + (150\angle -30^\circ) + \left(\hat{V}_3\right)(14.93\angle 68^\circ)$$

$$\rightarrow \hat{V}_3 = 17.3876 + 4.6686j$$